

Επίλυση εξισώσεων με εναλλακτικούς τρόπους

Τσαμπούκα Πετρούλα
ΣΕ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΔΥΤΙΚΗΣ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Να βρεθούν οι ρίζες της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} - 4$$

$$\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} - 4 = 0 \quad (1) \quad A_1 = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

- 1^{ος} τρόπος (με γνώσεις της Β' Λυκείου)

Ύψωση στο τετράγωνο

$$2x - 3 = 16 - 8\sqrt{4x+1} + 4x + 1 \Leftrightarrow$$

$$8\sqrt{4x+1} = 2x + 20 \Leftrightarrow 4\sqrt{4x+1} = x + 10$$

Δε θέτουμε κάποιο περιορισμό και ξαναυψώνουμε στο τετράγωνο

$$16(4x+1) = x^2 + 20x + 100 \Leftrightarrow x^2 - 44x + 84 = 0$$

Ρίζες $x_1 = \frac{44-40}{2} = 2$

$x_2 = \frac{44+40}{2} = 42$ (Απορρίπτεται διότι δεν επαληθεύει την (1))

Η x_1 ανήκει στο A_1 και επαληθεύει την (1).

- 2^{ος} τρόπος (με χρήση μονοτονίας και γνώσεις Γ' Λυκείου)

$$f(x) = \sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} - 4$$

$$\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} - 4 = 0$$

Η εξίσωση έχει μία προφανή λύση τη $x=2$.

Θα αποδείξουμε ότι είναι μοναδική.

$f_1(x) = 2x - 3$ και $f_2(x) = 4x + 1$ αύξουσες συναρτήσεις

$g(x) = \sqrt{x}$ αύξουσα συνάρτηση

Η (1) γράφεται ως

$$g(f_1(x)) + g(f_2(x)) - 4 = 0$$

$$x_1 < x_2 \xLeftrightarrow[f_1 \uparrow] f_1(x_1) < f_1(x_2) \xLeftrightarrow[g \uparrow] g(f_1(x_1)) < g(f_1(x_2))$$

Άρα $g(f_1(x))$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

Αντίστοιχα αποδεικνύεται ότι η $g(f_2(x))$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

Επειδή $f(x)$ αύξουσα ως άθροισμα αυξουσών συναρτήσεων η λύση είναι μοναδική.

Να λύσετε την εξίσωση

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2 \quad A = \mathbb{R}$$

Η κλασική μεθοδολογία με ύψωση στο τετράγωνο εμπλέκει πολλές πράξεις, οδηγώντας τελικά σε μία πολυωνυμική εξίσωση 8^{ου} βαθμού.

Θα επιχειρήσουμε να βρούμε ακρότατα των παραστάσεων στο αριστερό και στο δεξί μέλος της εξίσωσης με την τεχνική της:

Συμπλήρωσης τετραγώνου

$$\sqrt{3(x+1)^2 + 4} + \sqrt{5(x+1)^2 + 9} = 5 - (x+1)^2$$

$$\sqrt{3(x+1)^2+4} + \sqrt{5(x+1)^2+9} = 5 - (x+1)^2$$

$$\underbrace{\geq \sqrt{4} = 2 \qquad \geq \sqrt{9} = 3}_{\geq 5} \qquad \leq 5$$

Η εξίσωση επαληθεύεται μόνο όταν η τιμή του αριστερού και του δεξιού μέλους γίνει 5.

Αυτό συμβαίνει μόνο για $x = -1$.

Άσκηση σχολικού βιβλίου (Β' Λυκείου)

Να εξεταστεί αν έχει λύσεις η εξίσωση

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 2 \quad (1)$$

Από τη στιγμή που $\eta\mu x \leq 1$ και $\sigma\upsilon\nu x \leq 1$ για να επαληθεύεται η (1) πρέπει να υπάρχει x για το οποίο ταυτόχρονα $\eta\mu x = 1$ και $\sigma\upsilon\nu x = 1$, **το οποίο δε συμβαίνει για καμία τιμή του x .**

Πιο αλγεβρικά

$$\eta\mu x = 2 - \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow \eta\mu^2 x = (2 - \sigma\upsilon\nu x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2 x = 4 - 4\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x = 4 - 4\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x$$

$$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x + 3 = 0$$

Αδύνατη

Θα μας ενδιαφέρει να βρούμε τις τιμές της παραμέτρου α για τις οποίες έχει λύση η εξίσωση (Ποια είναι η μέγιστη τιμή της παραμέτρου α ;) 

$$\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = \alpha \quad (1)$$

(Με γνώσεις της Β' Λυκείου)

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$
η (1) γίνεται

$$\pm \sqrt{1 - \eta\mu^2 x} + \eta\mu x = \alpha \quad (2)$$

Θέτοντας $\eta\mu x = y$ η (2) γίνεται

$$\pm \sqrt{1 - y^2} + y = \alpha \Rightarrow 1 - y^2 = (\alpha - y)^2$$

Μετά από πράξεις καταλήγω σε παραμετρική
β/θμια εξίσωση.

$$2y^2 - 2ay + a^2 - 1 = 0 \quad (3)$$

Για να έχει λύσεις η εξίσωση πρέπει η διακρίνουσα

$$\Delta = 8 - 4a^2 \geq 0 \Leftrightarrow |a| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$$

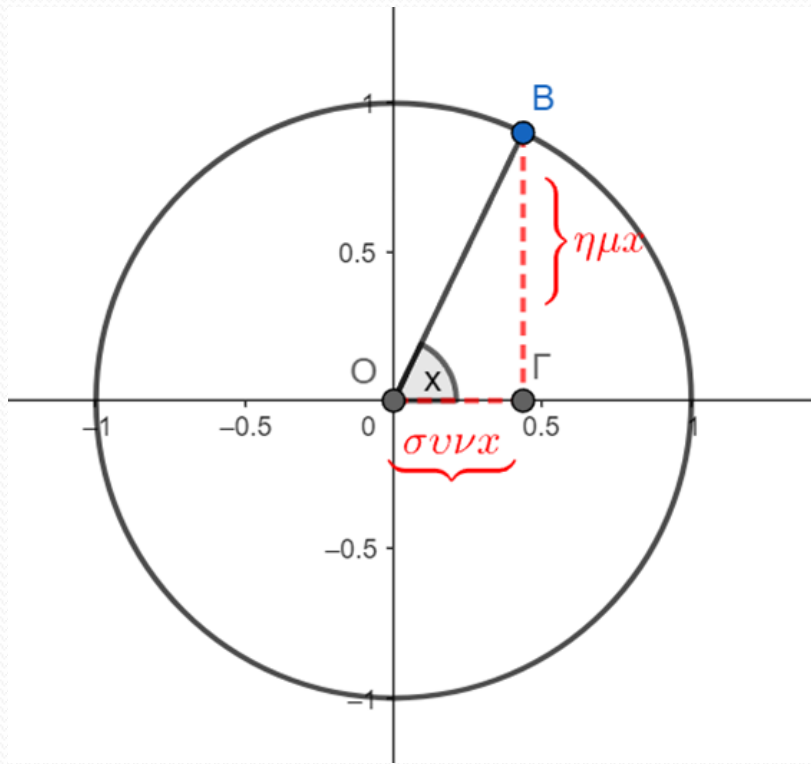
Θέτω $a = \sqrt{2}$ και η (3) γίνεται

$$2y^2 - 2\sqrt{2}y + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}y - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Επειδή } y = \eta\mu x \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

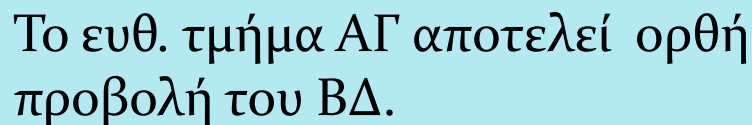
$$\text{Άρα } x = \frac{\pi}{4}$$

Γεωμετρική αντιμετώπιση της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = \alpha$

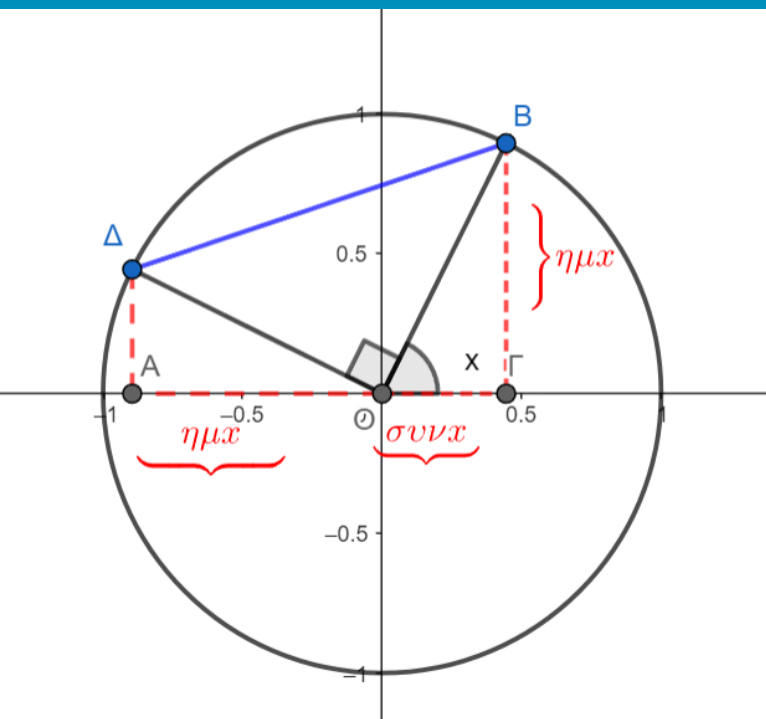


Πως μπορούμε να αθροίσουμε τα
ευθ. τμήματα ΟΓ και ΓΒ;

Θα πρέπει να τα καταστήσουμε
συγγραμμικά.

$$\text{Επειδή } \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$
$$-\sigma v v \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + \sigma v v x = \alpha \Leftrightarrow \left| \sigma v v \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \right| + \sigma v v x = \alpha \quad (1)$$


Για να έχει λύση η (1) θα πρέπει να υπάρχει προβολή του ΒΔ με μήκος α



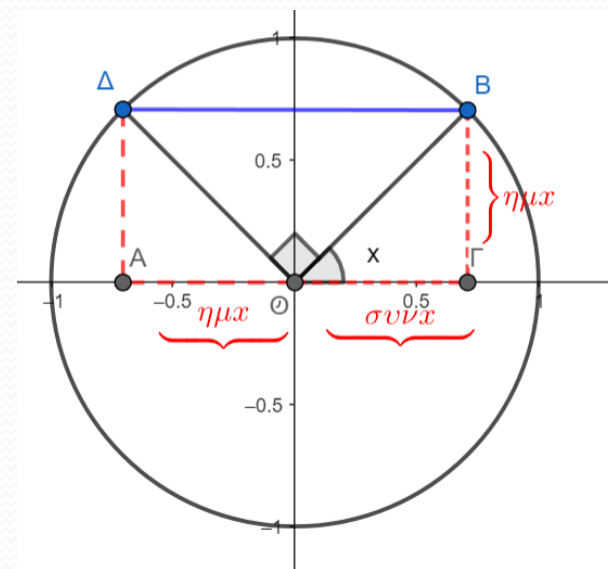
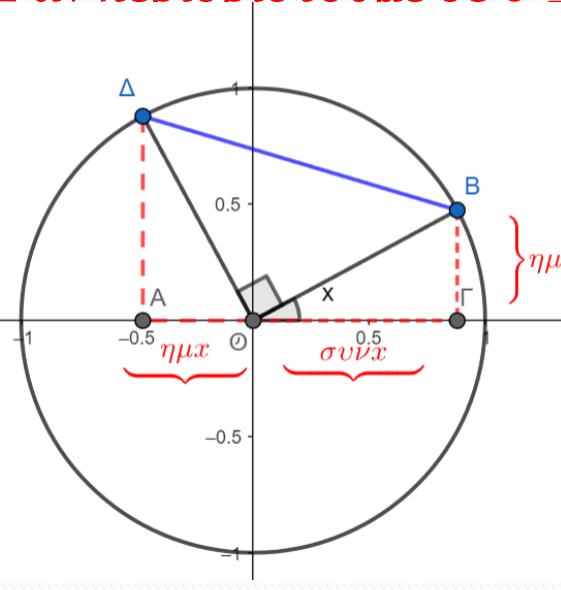
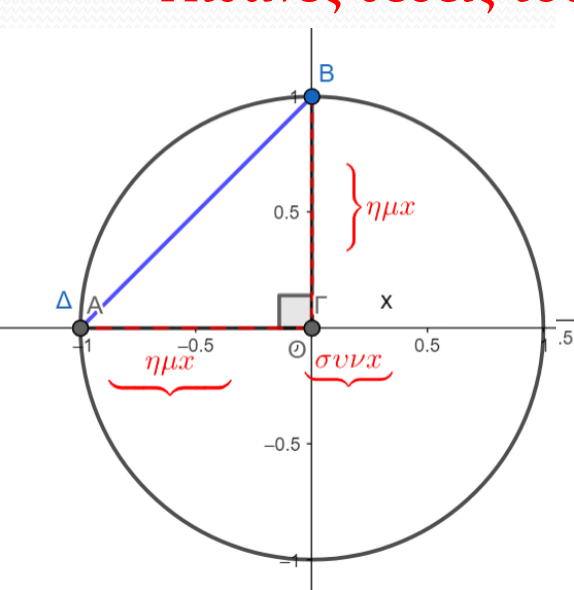
$$\left| \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \right| + \sin x = \alpha$$

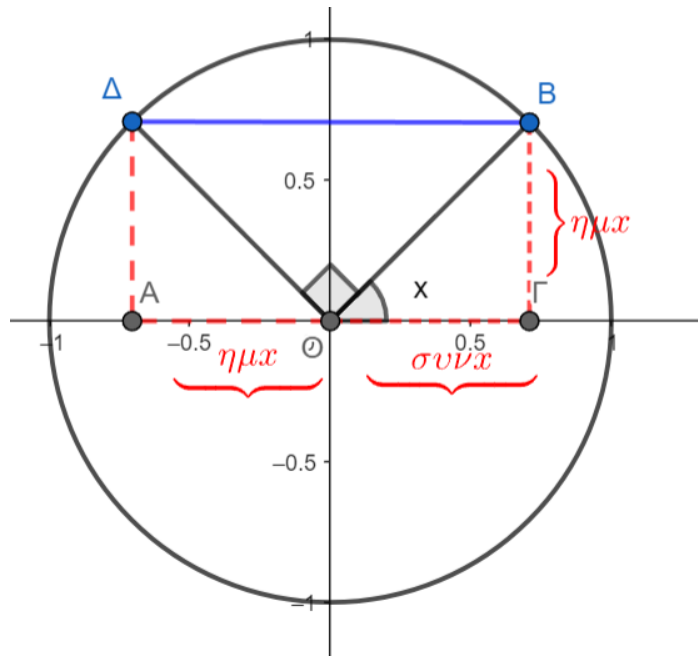
Το τρίγωνο ΟΔΒ είναι ορθογώνιο.
Επομένως

$$BD^2 = OD^2 + OB^2 = 1 + 1 = 2$$

Άρα $BD = \sqrt{2}$

Πιθανές θέσεις του ΒΔ αν περιοριστούμε σε $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$





Η προβολή του ΒΔ που έχει δεδομένο μήκος $\sqrt{2}$ γίνεται μέγιστη όταν το ΒΔ γίνεται παράλληλο στον xx' . Αυτή είναι η μέγιστη τιμή που παίρνει το α.

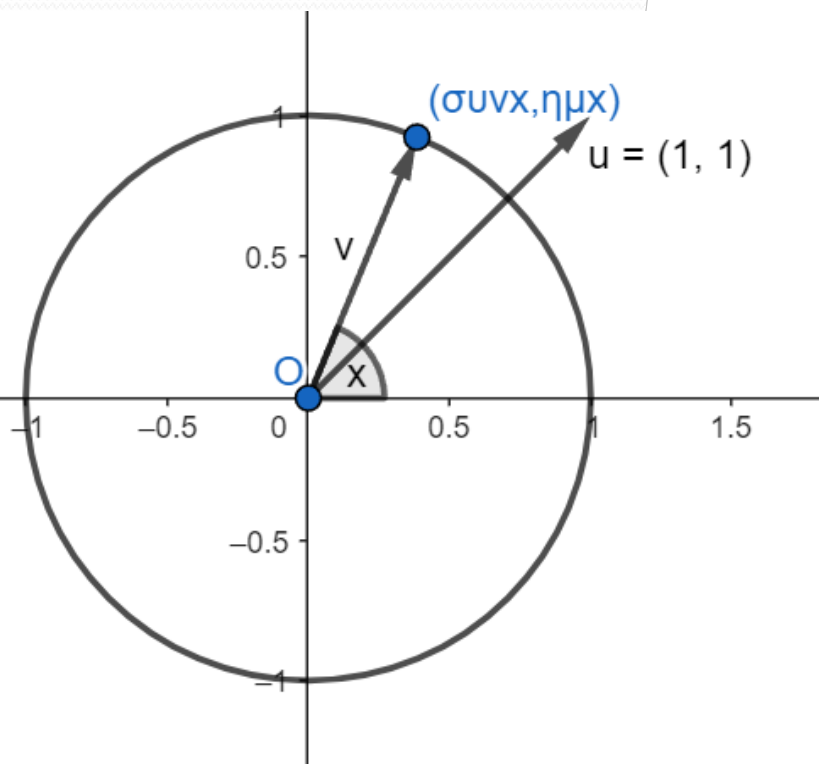
$$\text{Η εξίσωση γίνεται } \sin x + \eta \mu x = \sqrt{2}$$

Στην περίπτωση αυτή τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ είναι ίσα αφού στο ορθογώνιο ΑΓΒΔ οι απέναντι πλευρές είναι ίσες (ΑΔ=ΒΓ) και ΟΔ=ΟΒ=1.

Από την ισότητα προκύπτει ότι

$$\widehat{ΑΟΔ} = \widehat{ΓΟΒ} = \frac{\pi}{4}$$

Εναλλακτικός τρόπος επίλυσης με χρήση διανυσμάτων (Μαθηματικά προσανατολισμού Β' Λυκείου)



Η εξίσωση

$$\cos x + \sin x = \alpha$$

εκφράζεται υπό μορφή
διανυσμάτων ως εσωτερικό
γινόμενο

$$(\cos x, \sin x) \cdot (1, 1) = \vec{u} \cdot \vec{v} = \alpha$$

Το εσωτερικό γινόμενο μεγιστοποιείται όταν τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ γίνουν συγγραμμικά, δηλαδή όταν το x έχει τέτοια τιμή ώστε το $\vec{v}$ να έχει κοινό φορέα με το $\vec{u}$.

Ξεκινώντας από την εξίσωση

$$(\sigma\upsilon\nu x, \eta\mu x) \cdot (1,1) = \vec{u} \cdot \vec{v} = a$$

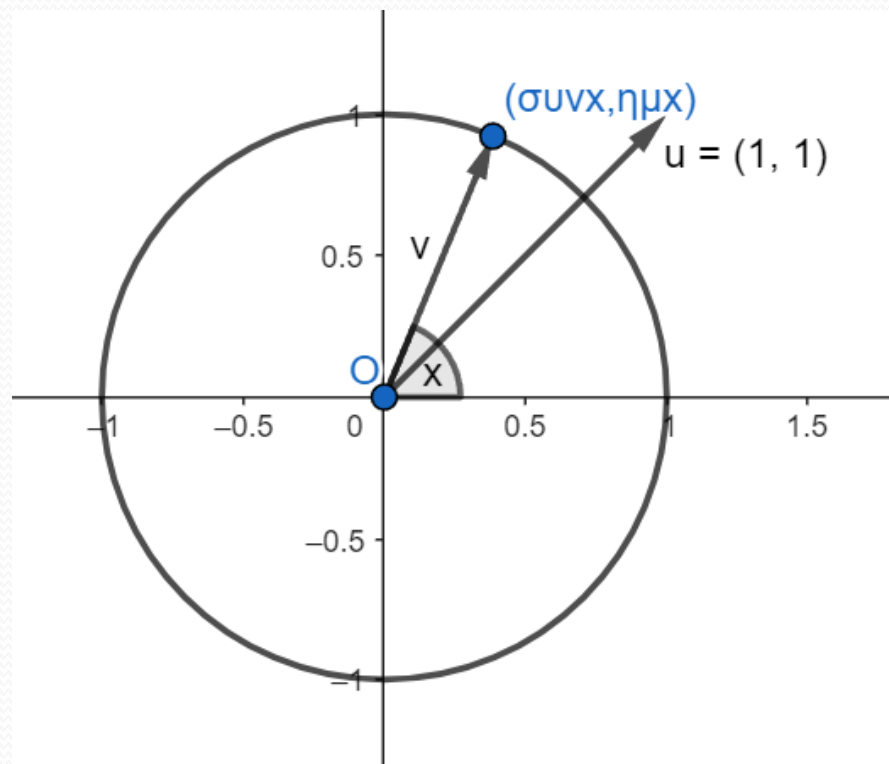
το a παίρνει τη μέγιστη τιμή όταν

$$\begin{aligned}(\sigma\upsilon\nu x, \eta\mu x) \cdot (1,1) &= |(\sigma\upsilon\nu x, \eta\mu x)| |(1,1)| \\ &= \sqrt{(\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x)} \sqrt{1+1} = a\end{aligned}$$

Άρα $a = \sqrt{2}$.

Στην περίπτωση αυτή η γωνία x είναι τέτοια ώστε $\varepsilon\varphi x = 1$.

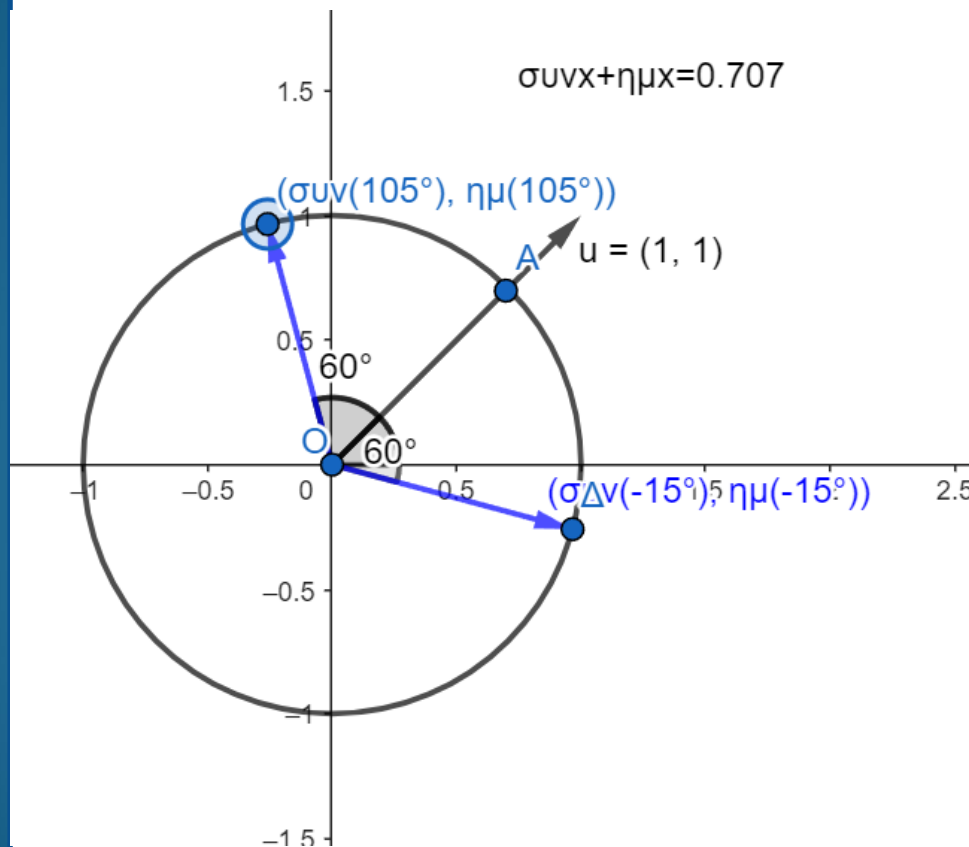
Επομένως $x = \frac{\pi}{4}$.



Τι θα γίνει στην περίπτωση που το α δεν παίρνει τη μέγιστη τιμή, π.χ

$$\sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Τι σημαίνει αυτό για τη σχετική θέση των 2 διανυσμάτων;



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 60^\circ$$

$$\chi = \theta + 45^\circ = 105^\circ$$

Εύρεση της μέγιστης τιμής του α στην εξίσωση

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = a \quad (1)$$

με γνώσεις της Γ' Λυκείου

Αποτελεί ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ και αναζητούμε ακρότατα.

$$f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow$$

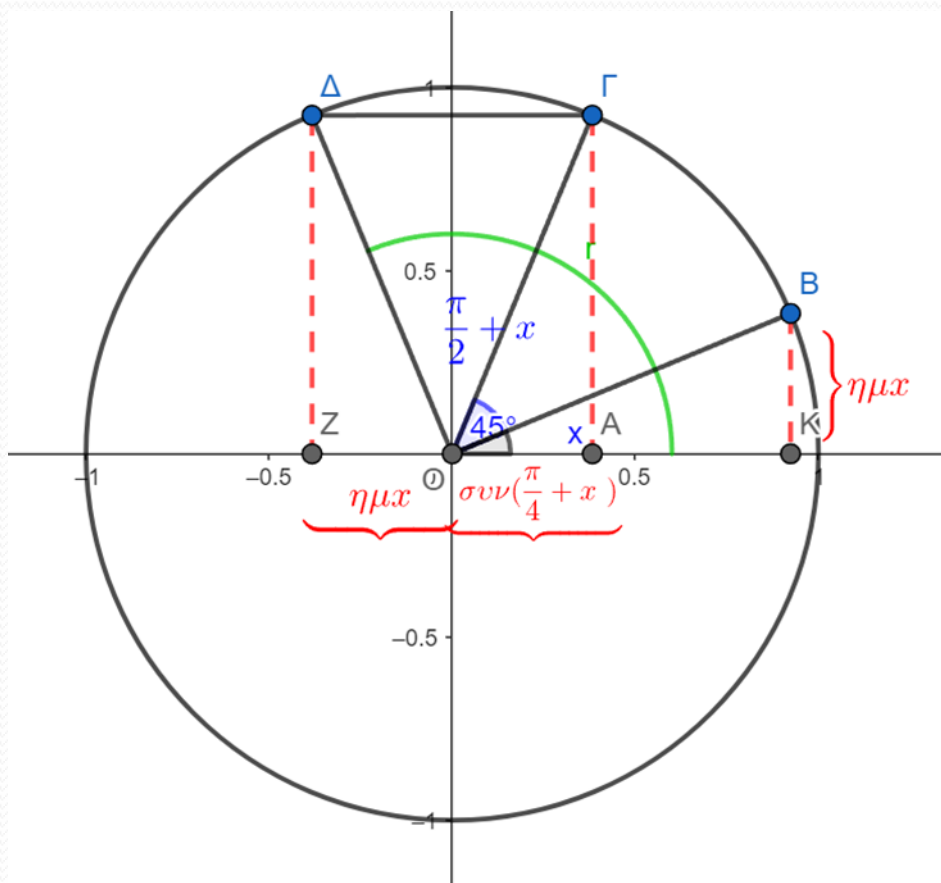
$$\text{Για } k = 0, x = \frac{\pi}{4}.$$

Επομένως η μέγιστη τιμή που λαμβάνει το α είναι $\sqrt{2}$ για $x = \frac{\pi}{4}$.

Επεκτάσεις σε εξισώσεις της μορφής

$$\sin(\theta+x)+\eta\mu x = \alpha$$

(Δεν αντιμετωπίζονται με μετατροπή β/θμια εξίσωση)



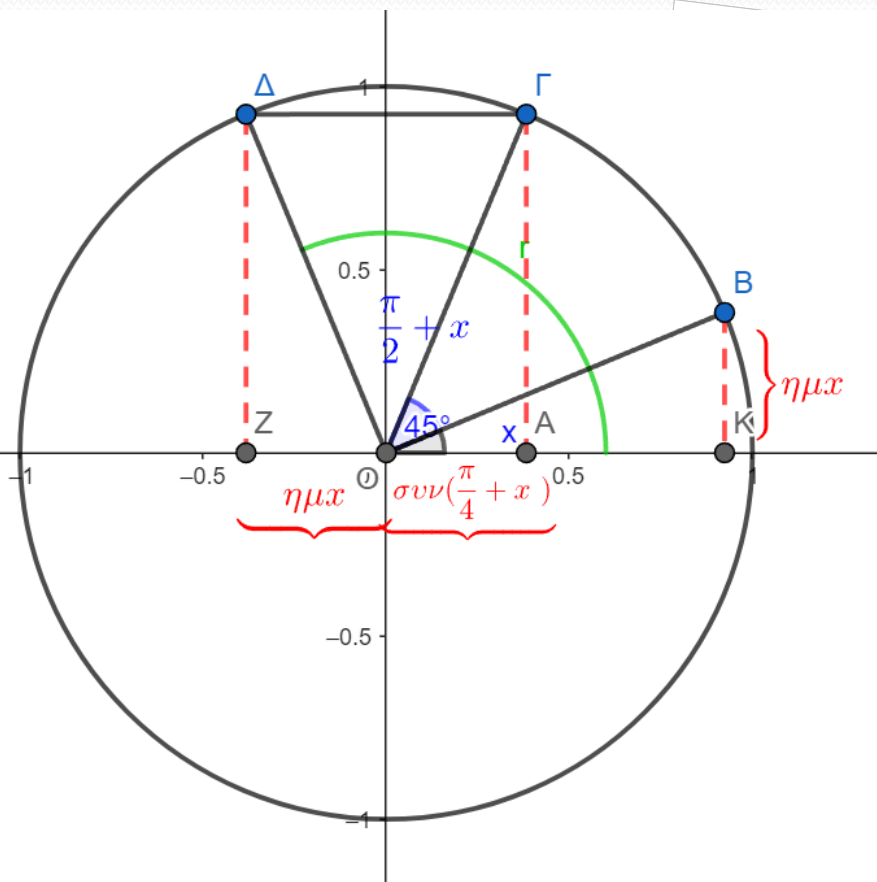
Έστω ότι θέλουμε να επιλύσουμε την εξίσωση

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \eta\mu x = \alpha$$

για τη **μέγιστη τιμή του α** που είναι επιλύσιμη.

Η εξίσωση μετασχηματίζεται στη μορφή

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \alpha$$



Η τιμή του α μεγιστοποιείται όταν το ZE γίνεται παράλληλο στον άξονα xx' .

$$\widehat{ZOE} = \frac{\pi}{2} + x - \frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{4}$$

Εφαρμόζοντας το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ZEO παίρνουμε

$$ZE^2 = 1 + 1 - 2\sin\frac{\pi}{4} = 2 - \sqrt{2}$$

$$\text{Άρα } ZE = \alpha = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Για ZE παράλληλο στον xx' τα τρίγωνα ΓΟΖ και ΕΟΔ γίνονται ίσα. Επομένως από τη σχέση $2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} = \pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8}$ που είναι και η λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης.

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \eta\mu x = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Εξισώσεις της προηγούμενης μορφής δεν αντιμετωπίζονται με μετατροπή τους σε β/θμια εξίσωση.

Αν δεν ακολουθούσαμε την προηγούμενη μεθοδολογία θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε τύπους αθροίσματος **που είναι εκτός ύλης**

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu\frac{\pi}{4}\eta\mu x + \eta\mu x = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma\upsilon\nu x - \frac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu x + \eta\mu x = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x + (\sqrt{2} - 1)\eta\mu x = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x + \epsilon\varphi\frac{\pi}{8}\eta\mu x = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

Συνέχεια της επίλυσης

$$\sigma\upsilon\nu x + \epsilon\varphi \frac{\pi}{8} \eta\mu x = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x + \frac{\eta\mu \frac{\pi}{8}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{8}} \eta\mu x = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{8} \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu \frac{\pi}{8} \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu \left(x - \frac{\pi}{8} \right) = \sigma\upsilon\nu 0$$

$$\text{Επομένως } x = \frac{\pi}{8}$$

Εύρεση της μέγιστης τιμής του α στην εξίσωση
 $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu(\theta + x) = a \quad (2)$

με γνώσεις της Γ' Λυκείου

Αποτελεί ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu(\theta + x)$ και αναζητούμε ακρότατα.

$$f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu(\theta + x)$$

$$\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu(\theta + x) &\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta - x\right) \Leftrightarrow x \\ &= 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \theta - x\end{aligned}$$

$$\text{Για } k = 0, x = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}.$$

Για $\theta = \frac{\pi}{4}$ η $f(x)$ λαμβάνει τη μέγιστη τιμή για $x = \frac{\pi}{8}$ που είναι $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \eta\mu\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}.$

Παρ' ολ' αυτά η εξίσωση (2) δεν μπορεί να επιλυθεί στη βάση της ύλης και των τεχνικών της Γ' Λυκείου για α διαφορετικό του μεγίστου.

Ποια είναι η μορφή των τριγωνομετρικών εξισώσεων που μπορούμε να λύσουμε;

- $\eta\mu x = a$
- $\sigma\upsilon\nu(\theta+x)=\eta\mu x$
- $\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = a$
- $\sigma\upsilon\nu(\theta + x) + \eta\mu x = a$

Επιπλέον ερευνητικά ερωτήματα

- ❖ Επίλυση της $\sigma\upsilon\nu(\theta + x) + \eta\mu x = a$ για οποιαδήποτε τιμή της a για την οποία έχει ρίζες.
- ❖ Να καταλήξουμε σε γενικό τύπο επίλυσης για τη μέγιστη τιμή του a σαν συνάρτηση του θ .

Να βρεθούν οι ρίζες, αν υπάρχουν, της εξίσωσης

$$\textcolor{red}{\text{συν}}^{\frac{7}{5}}x + \textcolor{red}{\eta\mu}^{\frac{5}{3}}x = \sqrt{2} \quad (1)$$

$$|\text{συν}x| \leq 1 \text{ και } |\eta\mu x| \leq 1$$

Από τη μονοτονία των εκθετικών συναρτήσεων
προκύπτει

$$a^x < a, x > 1 \text{ όταν } a < 1$$

Τα $\text{συν}^{\frac{7}{5}}x$ και $\eta\mu^{\frac{5}{3}}x$ δεν μπορούν να γίνουν ταυτόχρονα
1.

Επομένως

$$\text{συν}^{\frac{7}{5}}x + \eta\mu^{\frac{5}{3}}x < \text{συν}x + \eta\mu x \leq \sqrt{2} \quad (\textcolor{red}{\text{από προηγούμενες}} \\ \textcolor{red}{\text{διαφάνειες}})$$

Επειδή για κάθε x , $\text{συν}^{\frac{7}{5}}x + \eta\mu^{\frac{5}{3}}x < \sqrt{2}$
προκύπτει ότι η εξίσωση (1) $\textcolor{red}{\text{δεν έχει λύσεις.}}$

Να εξετάσετε αν έχει λύσεις η εξίσωση και ποιες είναι αυτές.

$$[(x - 2)^2 + 4] \left(x + \frac{1}{x} \right) = 8$$

Με γνώσεις της Β' Λυκείου

Αν ανοίξουμε τις παρενθέσεις παίρνουμε

$$x^3 - 4x^2 + 9x - 12 + \frac{8}{x} = 0 \quad (1)$$

Πολ/σιάζοντας με x καταλήγουμε στην πολυωνυμική εξίσωση που αν εξαιρέσουμε το 0 έχει τις ίδιες ρίζες με την

$$x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 12x + 8 = 0$$

Εφαρμόζοντας σχήμα Horner δε βρίσκουμε ακέραιες ρίζες, αλλά δεν μπορούμε γενικά να αποκλείσουμε την ύπαρξη ριζών.

$$[(x-2)^2 + 4] \left(x + \frac{1}{x} \right) = 8$$

Διερεύνηση του πλήθους των ριζών με χρήση των ανισοτήτων.

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2, \quad \alpha > 0$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2, \quad \alpha < 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x + \frac{1}{x} \geq 2, x > 0 \\ [(x-2)^2 + 4] \geq 4 \end{array} \right\} \Rightarrow [(x-2)^2 + 4] \left(x + \frac{1}{x} \right) \geq 8, \\ x > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x + \frac{1}{x} \leq -2, x < 0 \\ [(x-2)^2 + 4] \geq 4 \end{array} \right\} \Rightarrow [(x-2)^2 + 4] \left(x + \frac{1}{x} \right) \leq -8, \\ x < 0$$

Επειδή $[(x - 2)^2 + 4] \left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 8, \quad x > 0$

Η εξίσωση $[(x - 2)^2 + 4] \left(x + \frac{1}{x}\right) = 8$

έχει λύσεις για x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις εξισώσεις

$$\left. \begin{array}{l} (x - 2)^2 + 4 = 4 \\ x + \frac{1}{x} = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \end{array} \quad \text{Δεν έχει λύση}$$

Αντιμετώπιση με γνώσεις της Γ' Λυκείου

Εκτελούμε τις πράξεις και καταλήγουμε στην

$$x^3 - 4x^2 + 9x - 12 + \frac{8}{x} = 0$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 12x + 8$$

Με σχήμα Horner δεν μπορούμε να βρούμε ρίζες.

Υπολογίζουμε τις παραγώγους

$$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 18x - 12$$

$$g''(x) = 12x^2 - 24x + 18 = 6(2x^2 - 4x + 3)$$

Επειδή $\Delta < 0$, $g''(x) > 0$ για κάθε $x \Rightarrow$

$g'(x)$ είναι αύξουσα για κάθε x

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = +\infty$$

Η $g'(x)$ έχει μόνο μία ρίζα $\Rightarrow$ Η $g(x)$ παρουσιάζει **μόνο ένα τοπικό ακρότατο**.

$$g(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 12x + 8$$

$$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 18x - 12$$

Επειδή η $g'(x)$ δεν παραγοντοποιείται με προφανή τρόπο θα προσπαθήσουμε να **περιορίσουμε την περιοχή του ακρότατου** είτε

- Εφαρμόζοντας **Bolzano** στην $g'(x)$

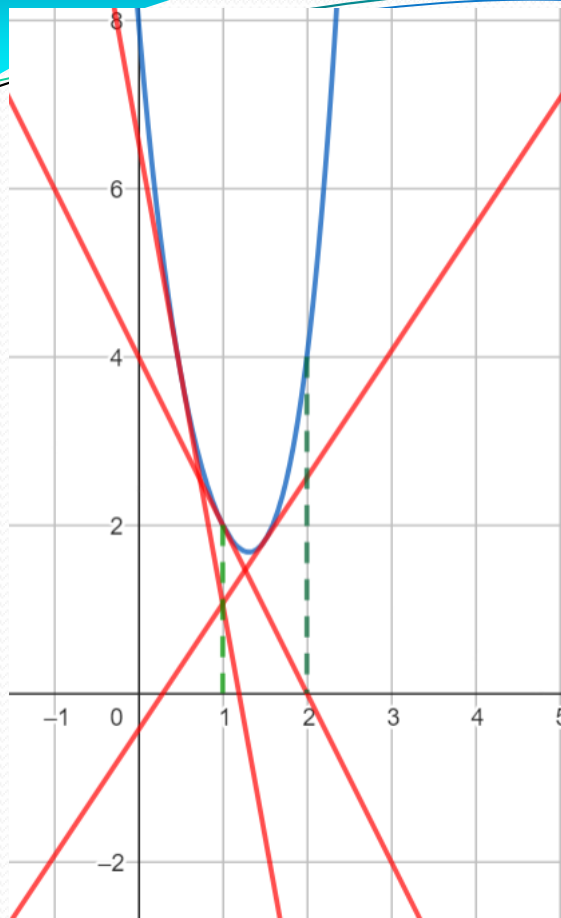
$$g'(0) = -12 \quad g'(1) = -2 \quad g'(2) = 8$$

Επομένως το ακρότατο x_0 βρίσκεται στο διάστημα $(1,2)$. είτε

- Παίρνοντας τιμές της $g(x)$

$$g(0) = 8 \quad g(1) = 2 \quad g(2) = 4$$

Παρατηρούμε ότι $g(0) > g(1)$ και $g(2) > g(1)$
Επειδή υπάρχει αλλαγή μονοτονίας μεταξύ 1 και 2
η $g(x)$ παρουσιάζει ακρότατο για $x \in (1,2)$.



Το Τ.Ε. εντοπίζεται για x_0 στο διάστημα $(1, 2)$

Η κλίση $g'(x)$ της g είναι γν. αύξουσα και αντιπροσωπεύει το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η g . Επομένως $g'(1) < g'(x)$ για $x \in (1, 2)$. Επιπλέον επειδή στη θέση x_0 έχουμε Τ.Ε.

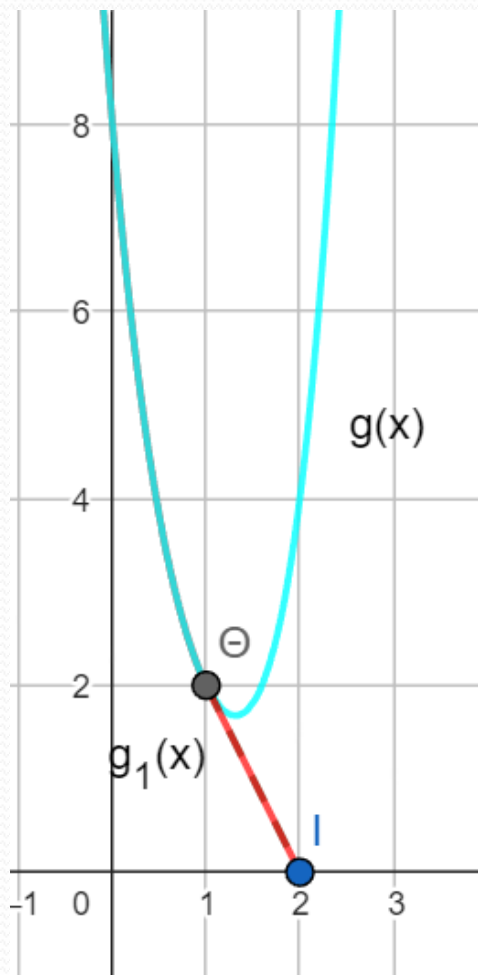
$$g'(1) < g'(x_0) = 0, \quad 1 < x_0 < 2$$

Δεν γνωρίζουμε την ακριβή θέση x_0 του Τ.Ε., αλλά δείξαμε ότι βρίσκεται μεταξύ $x = 1$ και $x = 2$. Αν το Τ.Ε. βρίσκεται πολύ κοντά στο 2 η $g(x)$ θα κατέρχεται μέχρι το Τ.Ε. και αυτό αποτελεί την δυσχερέστερη περίπτωση για εμάς αφού μετά το Τ.Ε. η $g(x)$ θα γίνει αύξουσα.

Αν θεωρήσουμε ότι για $2 > x > 1$ η $g(x)$ μειώνεται με το μέγιστο δυνατό ρυθμό, που είναι $g'(1)$ λόγω της μονοτονίας της $g'(x)$, μας ενδιαφέρει να δείξουμε ότι, ακόμη και αν το Τ.Ε. έχει θέση πολύ κοντά στο $x = 2$, θα εξακολουθεί να είναι θετικό.

Τι σημαίνει γραφικά αυτό που περιγράψαμε;

Επειδή $g''(x) > 0$, η $g(x)$ είναι κυρτή συνάρτηση και επομένως το γράφημα της συνάρτησης είναι πάνω από την εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της.



Έστω $g_1(x)$ η εξίσωση της εφαπτομένης της $g(x)$ στο σημείο $(1, g(1))$.

Για αυτήν ισχύει ότι

$$g_1(x) < g(x) \quad (1)$$

Την ορίζουμε μόνο για $x \in (1, 2]$ και έχει κλίση $g'(1)$.

Η εξίσωσή της είναι

$$g_1(x) - g(1) = g'(1)(x - 1) \Leftrightarrow$$

$$g_1(x) = g(1) + g'(1)(x - 1) >$$

$$g_1(2) = g(1) + g'(1) = 2 - 2 = 0, \text{ για } x \in (1, 2)$$

Από την (1) για $x = x_0$ προκύπτει ότι για το Τ.Ε. ισχύει
 $g(x_0) > 0$

β' τρόπος επίλυσης

Θα προσπαθήσουμε να φράξουμε την τιμή του τοπικού ελαχίστου $g(x_0)$.

$$\int_1^{x_0} g'(x) dx = g(x_0) - g(1) \Leftrightarrow g(x_0) = g(1) + \int_1^{x_0} g'(x) dx \quad (1)$$

Επειδή $g'(x)$ γν. αύξουσα $\Leftrightarrow g'(1) < g'(x)$ για κάθε $x \in (1, 2)$

$$\begin{aligned} (1) \Rightarrow g(x_0) &> g(1) + \int_1^{x_0} g'(1) dx = g(1) + g'(1)(x_0 - 1) \\ &> g(1) + g'(1)(2 - 1) = 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$g'(1) < 0 \text{ και } x_0 < 2$$

Επειδή $g(x_0) > 0$ και Τ.Ε. της g , $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η $g(x)$ δεν έχει ρίζες.

γ' τρόπος επίλυσης

$$g(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 12x + 8$$

Διαιρώντας με $x - 1$ η $g(x)$ γράφεται

$$g(x) = (x - 1)(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + 2$$

Ορίζουμε $h(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 6$

$$h'(x) = 3x^2 - 6x + 6 > 0 \text{ για κάθε } x$$

Άρα $h(x)$ γν. αύξουσα

$$\text{Για } x = 1 \quad h(1) = -2$$

$$\text{Για } 2 > x > 1 \quad (x - 1)(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) > -2(x - 1) \Leftrightarrow$$

$$g(x) > -2(x - 1) + 2 > -2(2 - 1) + 2 = 0$$

Χρησιμοποιώντας ως δεδομένο ότι η $g(x)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για x στο διάστημα $(1, 2)$ προκύπτει ότι η $g(x)$ είναι παντού θετική και άρα δεν έχει ρίζες.

Σας ευχαριστώ