Έρκυνα, Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών– Επιστημονικών Θεμάτων, Τεύχος 22ο, 42-56, 2021

Ο διδακτικός μετασχηματισμός στη διδασκαλία του εμβαδού επιπέδων σχημάτων στο Γυμνάσιο

Πετρούλα Τσαμπούκα
ptsampouka@sch.gr

Εκπαιδευτικός Δ/θμιας Εκπαίδευσης, MSc, PhD

Περίληψη. Στην εργασία αυτή γίνεται μία ανασκόπηση της έννοιας του διδακτικού μετασχηματισμού στα μαθηματικά και των μορφών που μπορεί αυτός να λαμβάνει είτε ως έννοιας-εργαλείου είτε ως θεωρήματος στην πράξη. Ο διδακτικός μετασχηματισμός εφαρμόζεται σε οποιοδήποτε γνωστικό αντικείμενο το οποίο απαιτείται να αποσπασθεί από το ακαδημαϊκό πλέγμα γνώσεων που του έδωσε υπόσταση για να διδαχθεί σε μία σχολική τάξη. Στην παρούσα μελέτη θα εμβαθύνουμε στο διδακτικό μετασχηματισμό που συντελείται κατά τη διδασκαλία του εμβαδού επιπέδων σχημάτων στη Β΄ Γυμνασίου και θα προτείνουμε διδακτικές παρεμβάσεις που στηρίζονται σε αυτόν. Εκκινώντας από τη θεωρία μέτρου που αποτελεί το θεωρητικό υπόβαθρο για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός χωρίου αναζητούμε τις παραδοχές που ενδεχομένως γίνονται στο σχολικό βιβλίο και διερευνούμε μέσα από ποιες τεχνικές που είναι συμβατές με το επίπεδο γνώσεων των μαθητών της τάξης αυτής μπορεί να προσεγγιστεί η θεωρία του υπό μελέτη αντικειμένου.

Λέξεις κλειδιά: διδακτικός μετασχηματισμός, επίπεδα σχήματα, εμβαδόν, μέτρο Jordan

Εισαγωγή

Διάφορες θεωρίες έχουν αναπτυχθεί στην πάροδο του χρόνου για το πώς μεταφέρεται η γνώση στους μαθητές. Σύμφωνα με τις αρχές του συμπεριφορισμού η μάθηση είναι πιο αποτελεσματική όταν ο μαθητής συμμετέχει ενεργά σ' αυτή μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες και δεν είναι απλά ένας παθητικός ακροατής. Παρ' όλο που η συμπεριφοριστική διδασκαλία είναι κατάλληλη για μεταφορά διαδικαστικών γνώσεων δεν επιτυγχάνει την ενεργοποίηση της γνώσης από πλευράς μαθητών σε ένα πλαίσιο καταστάσεων διαφορετικό από αυτό που την ανέδειξε.

Κατά τους ψυχολόγους της σχολή Gestalt ιδιαίτερο ρόλο παίζει η οπτική αντίληψη για την επίλυση ενός προβλήματος. Μόνο όταν εξασκηθούν οι μαθητές στο να βλέπουν σχηματισμούς και όχι μεμονωμένα στοιχεία μπορούν να ανακαλύψουν τις μεταξύ τους σχέσεις, μια διαδικασία που είναι απαραίτητη για τη λύση ενός προβλήματος. Πολλές φορές οι σχέσεις δεν αποκαλύπτονται αυθόρμητα αλλά επιβάλλεται μια αναδιοργάνωση των στοιχείων του προβλήματος ώστε η εικόνα που θα προκύψει να παραπέμπει στην προϋπάρχουσα γνώση τους. Ο Wertheimer ψυχολόγος της σχολής Gestalt χρησιμοποίησε στα πειράματά του τη διδασκαλία του εμβαδού του παραλληλόγραμμου για να αναδείξει την αποτυχία μεταφοράς της γνώσης στους μαθητές που διδάχθηκαν απλώς τον τύπο εύρεσης του σε σχέση μ' αυτούς που κατέληξαν σ'αυτόν μέσα από μια διαδικασία οπτικοποίησης του αποτελέσματος και ανακάλυψης συσχετισμών. Συγκεκριμένα στα πειράματα του Wertheimer (1945) η διαδικασία διδάχθηκε και στις δύο κατηγορίες μαθητών δίνοντας ένα παραλληλόγραμμο του οποίου η μεγαλύτερή του πλευρά εκτείνεται οριζοντίως ενώ ζητήθηκε η εφαρμογή του σε ένα τέτοιο παραλληλόγραμμο καθώς και σε ένα παραλληλόγραμμο όπου οι οριζόντιες πλευρές ήταν κατά πολύ μικρότερες από τις πλάγιες. Οι μαθητές και των δύο κατηγοριών ανταποκρίθηκαν επιτυχώς στο πρώτο παραλληλόγραμμο ενώ μόνο οι μαθητές της δεύτερης κατηγορίας αναγνώρισαν τους συσχετισμούς που υπήρχαν αναδιατάσσοντας νοητικά το δεύτερο παραλληλόγραμμο ώστε να προκύψει ορθογώνιο και να νοηματοδοτηθεί ο τύπος που διδάχθηκαν.

Σύμφωνα με τον Dienes (1971) οι συγκεκριμένες εμπειρίες που αποκτούν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας είναι αναγκαίες για τη μάθηση. Οι εμπειρίες αυτές μπορούν να προσφερθούν μέσα από μια κατάλληλα σχεδιασμένη διδασκαλία που επιχειρεί να φέρει τους μαθητές σε επαφή με τις μαθηματικές έννοιες και ιδέες χωρίς όμως την αναφορά σε αφηρημένες οντότητες και χρήση συμβολισμών που είναι πιθανόν να αποθαρρύνουν και να αποπροσανατολίσουν τους μαθητές. Η επιτυχημένη τροποποίηση των μαθηματικών εννοιών που πρέπει να διδαχθούν ώστε να καταστούν κατάλληλες για το επίπεδο των μαθητών μιας τάξης αποτελεί το αντικείμενο του διδακτικού μετασχηματισμού.

Ο διδακτικός μετασχηματισμός ως διαδικασία για τη διδασκαλία γνωστικών περιοχών στις σχολικές αίθουσες

Ο διδακτικός μετασχηματισμός ή διαφορετικά διδακτική μετατόπιση αφορά στη μεταφορά στις σχολικές αίθουσες της γνώσης που παράγεται έξω από το σχολικό πλαίσιο ως αποτέλεσμα της κοινωνικής απαίτησης για μόρφωση και διάχυση της γνώσης. Στο διδακτικό μετασχηματισμό δεν ενδιαφέρει η χρήση της γνώσης ως ένα εργαλείο που βοηθά στην παραγωγή κάποιου έργου αλλά θα πρέπει να της προσδίδεται κοινωνική αποδοχή και νομιμοποίηση για να ενταχθεί στα σχολικά προγράμματα σπουδών (Chevallard, 1989).

Για να μπορέσει ένα τμήμα της γνώσης να μεταφερθεί στο σχολείο θα πρέπει να είναι μέρος ενός οργανωμένου συνόλου που στόχο έχει να επιτευχθεί τελικά ένα συγκεκριμένο επίπεδο γνώσεων. Για το λόγο αυτό οι γνώσεις αυτές αντλούνται από ένα σώμα επιστημονικής γνώσης. Στους Kang & Kilpatrick (1992) σημειώνεται ότι η αποκτηθείσα αυτή γνώση όπως και σε ένα ακαδημαϊκό περιβάλλον αποτελεί την αφετηρία για την παραγωγή νέων γνωστικών αποτελεσμάτων, που έχουν ως προϋπόθεση τη γνώση αυτή, με τη διαφορά όμως ότι ο μηχανισμός κατασκευής της νέας γνώσης στο σχολικό περιβάλλον δεν είναι εμφανής. Ακόμα και ο στόχος για την οικοδόμηση ενός αυτοτελούς θεωρητικού υπόβαθρου παραμένει κατά τη διδασκαλία στις σχολικές αίθουσες εν πολλοίς κρυφός. Αυτό συμβαίνει γιατί τα τμήματα της γνώσης τα οποία διδάσκονται αποσπώνται από ένα ευρύτερο ακαδημαϊκό σώμα γνώσης και μεταφέρονται σε ένα περιβάλλον στο οποίο ισχύουν ειδικές συνθήκες και επιβάλλονται περιορισμοί. Επομένως η παραγωγή νέων αποτελεσμάτων δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι απορρέει αβίαστα από μία ενοποιημένη θεωρία βασισμένη σε ένα σύνολο θεωρημάτων αφού ότι διδάσκεται έχει αποκοπεί από το φυσικό πλαίσιο που το ανέδειξε. Στο σχολικό πλαίσιο τα μαθηματικά αποτελέσματα παρουσιάζονται γενικά με διαφορετική σειρά από αυτήν που ανακαλύφθηκαν χωρίς να μπορεί να εντοπιστεί ποια ήταν η προϋπάρχουσα γνώση που τα γέννησε.

Η γνώση που θα επιλεγεί από το σώμα επιστημονικής γνώσης δεν μεταφέρεται αυτούσια στη σχολική πραγματικότητα αλλά υφίσταται διάφορες απλοποιήσεις και συγκερασμούς πριν καταλήξει να αποτελέσει τη σχολική γνώση. Το σύνολο των παρεμβάσεων και διαμορφώσεων που γίνονται στην επιστημονική γνώση είναι αυτό που καλείται τελικά διδακτικός μετασχηματισμός. Κατά την οργάνωση του υλικού προς διδασκαλία ακολουθείται η δομή παρουσίασης του επιστημονικού αντικειμένου αλλά με την απουσία των ενδιάμεσων συλλογισμών και επιχειρηματολογίας. Όπως παρατηρούν οι Bosch & Gascón (2006) οι έννοιες παρουσιάζονται χωρίς εξηγήσεις για τους λόγους που οδήγησαν στην ανακάλυψη τους αλλά και τους σκοπούς που εξυπηρετούν. Αυτού του είδους η διδακτική πρακτική καλείται “monumentalistic” (Chevallard, 2004) αφού οι μαθηματικές γνώσεις παρουσιάζονται στους μαθητές ως σημαντικά ορόσημα που πρέπει να γνωρίζουν (ή γνωστικά μνημεία που πρέπει να επισκεφτούν). Οι έννοιες λοιπόν διδάσκονται ως αυθύπαρκτες αφού είναι απαραίτητες για την επίλυση σχολικών προβλημάτων. Άλλες φορές όμως υφίστανται απλοποιήσεις χωρίς όμως να χάνουν την εγκυρότητά τους με αποτέλεσμα να συντελείται εκ των πραγμάτων περιορισμός του πεδίου εφαρμογής τους ώστε να καταστούν κατάλληλες για τους μαθητές ενός ορισμένου σχολικού επιπέδου.

Η διαδικασία του διδακτικού μετασχηματισμού συντελείται σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση συγκεκριμένα θέματα από την επιστημονική γνώση επιλέγονται ώστε να διαμορφωθούν διδακτικά κείμενα που θα αποτελέσουν τη διδακτέα γνώση, να συνταχθούν αναλυτικά προγράμματα και να συγγραφούν κείμενα οδηγιών προς τους διδάσκοντες. Οι άνθρωποι που συμμετέχουν στην πραγματοποίηση της πρώτης φάσης του μετασχηματισμού που καλείται και εξωτερικός μετασχηματισμός ανήκουν σε αυτό που ονομάζεται “νοόσφαιρα” (Chevallard, 1985) και μπορεί να είναι θεσμικές αρχές, ερευνητές, συγγραφείς αναλυτικών προγραμμάτων και σχολικών βιβλίων. Όλοι οι παραπάνω λαμβάνοντας υπόψη διάφορα κριτήρια τα οποία ανάλογα με την ιδιότητά τους μπορεί να είναι οι κοινωνικές ανάγκες, οι ιδιαίτερες συγκυρίες, το ευρύτερο πλέγμα των γνώσεων που πρέπει να μεταδοθούν ή οι ψυχολογικές προϋποθέσεις και νοητικές αναπαραστάσεις των μαθητών διαμορφώνουν τις προτάσεις τους για τα προγράμματα σπουδών. Στη δεύτερη φάση του μετασχηματισμού τα προϊόντα της πρώτης φάσης δέχονται δοκιμασίες και υπόκεινται σε τροποποιήσεις στην σχολική αίθουσα ανάλογα με το υπόβαθρο των μαθητών και τις αντιλήψεις του διδάσκοντα. Επομένως σε αυτή τη φάση ο μετασχηματισμός που καλείται εσωτερικός προκύπτει από την αλληλεπίδραση εκπαιδευτικών και μαθητών.

Όπως προείπαμε ο τρόπος παρουσίασης των εννοιών που εμφανίζονται στη διδακτέα ύλη δεν ακολουθεί τη σειρά και δεν αποκαλύπτει τον τρόπο που γέννησε αυτές τις έννοιες. Οι ερευνητές που εργάζονται σε μια ερευνητική περιοχή μελετούν τα φαινόμενα για να απομονώσουν έννοιες οι οποίες χαρακτηρίζονται από μια γενικότητα, δηλαδή επιδίδονται σε μια προσπάθεια αφαίρεσης των ειδικών συνθηκών που ισχύουν κατά τη λειτουργία του φαινομένου ώστε να προσδιοριστούν οι ιδιαίτερες αιτίες και οι προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες οι έννοιες μπορούν να εφαρμοστούν σε άλλες καταστάσεις διαφορετικές από αυτές που τις ανέδειξαν. Η διαδικασία αυτή καλείται αποπλαισίωση (decontextualization) (Brousseau, 1997) της γνώσης. Αντίθετα όταν ένας μαθητής έρχεται σε επαφή με μια νέα έννοια προσπαθεί να την εντάξει σε μια κατάσταση για να ελέγξει πως αυτή λειτουργεί, δηλαδή παίρνει την έννοια που συναντά και τη βάζει σε εφαρμογή σε ένα ειδικό πλαίσιο για να κατανοήσει τη χρήση της. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται επαναπλαισίωση (recontextualisation) (Brousseau, 1997) της γνώσης. Για να αποκτήσει όμως ο μαθητής ένα πραγματικό νοητικό εργαλείο θα πρέπει από την πλευρά του να κατανοήσει την έννοια ανεξάρτητα από τις ειδικές συνθήκες που της έδωσαν νόημα και να μπορέσει να την αποπλαισιώσει όπως τονίζει ο Σπύρου (2008) στη σελίδα 13 του συγγράμματος του. Αυτό θα του επιτρέψει να την εφαρμόσει σε νέες καταστάσεις με στόχο να τις επεξηγήσει ή να προβλέψει τους συσχετισμούς και τις αλληλεπιδράσεις διαφόρων μεταβλητών παραγόντων.

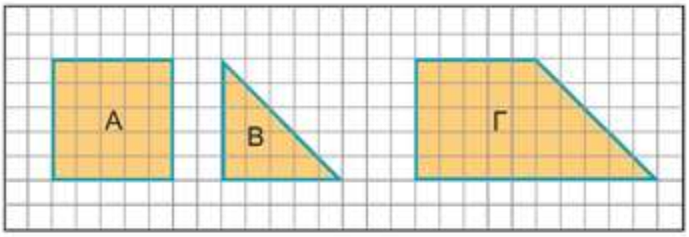
Η Douady (1987) χρησιμοποιεί τους όρους “εργαλείο” και “αντικείμενο” για να χαρακτηρίσει την αλλαγή στην κατάσταση μιας έννοιας. Κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών οι έννοιες εμφανίζονται κατά κύριο λόγο ως εργαλεία για την επίλυση προβλημάτων και όχι ως μέρος μιας συστηματικά οργανωμένης γνώσης. Η επαναλαμβανόμενη χρήση αυτών των εννοιών δημιουργεί μια οικειότητα και οδηγεί σιγά σιγά σε αποκάλυψη της συνεισφοράς τους στην προσέγγιση και αιτιολόγηση της λύσης και αυτό είναι τελικά που οδηγεί στο μετασχηματισμό των εργαλείων σε αφηρημένα αντικείμενα. Για παράδειγμα ξεκινώντας από την άθροιση αριθμών καταλήγουμε στην αθροιστική ιδιότητα της πληθικότητας όταν πρόκειται για την ένωση δύο ξένων μεταξύ τους πεπερασμένων συνόλων. Οι αθροιστικές ιδιότητες υπάρχουν στη μέτρηση εμβαδού σύνθετων σχημάτων που απαρτίζονται από πιο απλά καθώς και στον υπολογισμό του όγκου στερεών που κατασκευάζονται από πιο απλά στερεά.

Η έννοια των αναλλοίωτων είναι ένα επαναλαμβανόμενο θέμα στο έργο του Piaget *(*Piaget & Cook, 1952) ως μία σταθερή αλληλουχία σταδίων από τα οποία περνάει ένα άτομο κατά την κατασκευή των νοητικών του αναπαραστάσεων. Σύμφωνα με τον Piaget η γνωστική διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί ως μία διαδικασία προσαρμογής κατά την οποία η εσωτερική νοητική αναπαράσταση του εξωτερικού κόσμου αποκαλούμενη ως σχήμα (schema) υφίσταται δύο στάδια αλλαγών. Το πρώτο στάδιο είναι η αφομοίωση (assimilation) κατά το οποίο το υποκείμενο της μάθησης προσπαθεί να ενσωματώσει τα σχήματα στην αντίληψή του για τον πραγματικό κόσμο. Στο δεύτερο στάδιο είναι η συμμόρφωση (accommodation) κατά το οποίο σχήματα τα οποία δεν μπορούν να ερμηνεύσουν γεγονότα του εξωτερικού κόσμου υπόκεινται σε εκείνες τις τροποποιήσεις που θα τα καταστήσουν συμβατά με τους νόμους της πραγματικότητας. Παρ’ όλ’ αυτά όπως επισημαίνεται από τον Vergnaud (1982) η θεωρία του Piaget δε λαμβάνει υπόψη αυτές που αποκαλεί ο Vergnaud συσχετιστικές αναλλοίωτες (relational invariants), δηλαδή σχέσεις που παραμένουν αμετάβλητες κάτω από ορισμένο σύνολο μετασχηματισμών ή μεταβολών. Τέτοιες σχέσεις θα μπορούσε να είναι η πληθικότητα ενός συνόλου αν αναδιατάξω τα στοιχεία του ή ο όγκος ενός στερεού αν μεταβάλλω το σχήμα του.

Οι μαθητές στα σχολικά μαθηματικά συναντούν συσχετισμούς ανωτέρου επιπέδου οι οποίοι υποκρύπτουν θεωρήματα των μαθηματικών. Εντούτοις στην πράξη όταν καλούνται να λύσουν προβλήματα που απαιτούν τέτοιους συσχετισμούς αυτά αντιμετωπίζονται με έναν πρακτικό τρόπο και όχι ως εφαρμογή ενός γενικότερου θεωρήματος. Γι’ αυτό το λόγο ο Vergnaud αποκαλεί τις τεχνικές επίλυσης των προβλημάτων θεωρήματα στην πράξη (theorems in action) τα οποία δεν είναι τίποτα άλλο παρά οι συσχετιστικές αναλλοίωτες. Στόχος της διδασκαλίας είναι να αποκτήσουν οι μαθητές την ικανότητα να διακρίνουν αυτούς τους συσχετισμούς σε διάφορες αρχικά απλές καταστάσεις και στη συνέχεια να γενικεύσουν σε πιο σύνθετες. Θα εξετάσουμε σαν παράδειγμα στη συνέχεια το διδακτικό μετασχηματισμό που συντελείται κατά τη διδασκαλία στην τάξη του υπολογισμού του εμβαδού επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων.

Ο διδακτικός μετασχηματισμός στον υπολογισμό του εμβαδού επιπέδων σχημάτων στο σχολικό βιβλίο της Β' Γυμνασίου

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στο βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου των Βλάμου, Δρούτσα, Πρέσβη, & Ρεκούμη (2008) ξεκινά με δραστηριότητες υπολογισμού του εμβαδού επιπέδων σχημάτων χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης το εμβαδόν τετραγώνου με μήκος πλευράς 1 μονάδα. Τα σχήματα τοποθετούνται σε επίπεδο πάνω στο οποίο προϋπάρχει ένα πλέγμα τετραγώνων ώστε να διευκολυνθούν οι μαθητές στη μέτρηση των τετραγώνων που καλύπτουν την επιφάνεια των σχημάτων. Στο Σχήμα 1 δίνονται παραδείγματα υπολογισμού εμβαδού επιπέδων σχημάτων από το βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου με τη μέθοδο που αναφέραμε. Εδώ κάνουμε επιπλέον την υπόθεση ότι το πλέγμα των οριζοντίων και των καθέτων γραμμών πάνω στο οποίο τοποθετούνται τα γεωμετρικά σχήματα του Σχήματος 1 είναι ευθυγραμμισμένο με ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων.



Σχήμα 1. Πλέγμα πάνω στον οποίο τοποθετούνται τα επίπεδα σχήματα

Το γεγονός ότι το βιβλίο προτρέπει τους μαθητές να υπολογίσουν το εμβαδόν ενός επίπεδου σχήματος καταμετρώντας στοιχειώδη σύνολα που είναι τετράγωνα με μήκος πλευράς 1 μονάδα απορρέει από τη μαθηματική θεωρία μέτρου. Το μήκος, το εμβαδόν και ο όγκος υποσυνόλων του R, R^2 και R^3, αντίστοιχα, αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της έννοιας του μέτρου του αντίστοιχου υποσυνόλου. Θα προχωρήσουμε στη συνέχεια σε μια σύντομη διατύπωση της σχετικής μαθηματικής θεωρίας ώστε να καταστεί εφικτός ο εντοπισμός των στοιχείων εκείνων της θεωρίας που αναδεικνύονται κατά τη διαπραγμάτευση της εύρεσης του εμβαδού επιπέδων χωρίων στο σχολικό βιβλίο καθώς και οι διδακτικοί μετασχηματισμοί που αυτά έχουν υποστεί. Στη διαπραγμάτευσή μας θα περιοριστούμε σε υποσύνολα του R^2 επειδή στην περίπτωση του εμβαδού μελετούμε αντικείμενα τα οποία ανήκουν στις δύο διαστάσεις.

Ανατρέχοντας στη θεωρία μέτρου όπως αυτή παρουσιάζεται για παράδειγμα στον Μπετσάκο (2016) και ξεκινώντας το συλλογισμό μας από την ευθεία των πραγματικών αριθμών γνωρίζουμε ότι το μήκος διαστήματος I με άκρα a και b (είτε ανοικτό είτε κλειστό είτε ημιανοικτό διάστημα) είναι ο θετικός αριθμός $l(I) = b - a$. Αν το I είναι μη φραγμένο διάστημα τότε $l(I) = \infty$ ενώ $l(\emptyset) = 0$. Με αυτόν τον τρόπο ορίζουμε μια συνολοσυνάρτηση η οποία έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο των διαστημάτων ενώ το πεδίο τιμών της είναι $[0, +\infty]$. Μία τέτοια συνάρτηση την οποία θα εφοδιάσουμε με επιπλέον ιδιότητες και θα συμβολίζουμε με μ θα την αποκαλούμε μέτρο. Τα υποσύνολα για τα οποία ορίζεται μέτρο θα τα αποκαλούμε μετρήσιμα. Για υποσύνολα της μορφής $A = I_1 \times I_2$, όπου I_1 και I_2 διαστήματα, ορίζουμε $l(A) = l(I_1) l(I_2)$. Οι ιδιότητες που πρέπει ικανοποιεί μια τέτοια συνάρτηση μ είναι:

(1) Η μ ορίζεται για κάθε υποσύνολο του R^2

(2) Για κάθε μετρήσιμο $E \subset R^2$ ισχύει $\mu(E) \geq 0$

(3) Για κάθε υποσύνολο $A = I_1 \times I_2$ ισχύει $\mu(A) = l(A)$
(4) Αν $E_1 \subset E_2$ μετρήσιμα, τότε $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$
(5) Αν $E \subset R^2$ είναι μετρήσιμο και $x \in R^2$ τότε το $E + x$ είναι μετρήσιμο και $\mu(E + x) = \mu(E)$
(6) Αριθμήσιμη προσθετικότητα: Αν $E_1, E_2, \dots$ είναι το πολύ αριθμήσιμου πλήθους ξένα ανά δύο μετρήσιμα υποσύνολα του R^2, τότε $\mu(\cup_n E_n) = \Sigma_n \mu(E_n)$.

Αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει συνολοσυνάρτηση που να ικανοποιεί και τις 6 ιδιότητες. Αν παρ' ολ' αυτά περιοριστούμε στις ιδιότητες (1)-(5) παίρνουμε το εξωτερικό μέτρο Lebesgue ενώ αν περιοριστούμε στις (2)-(6) παίρνουμε το μέτρο Lebesgue. Χαλαρώνοντας την ιδιότητα (6) του μέτρου Lebesgue με το να απαιτούμε αντί για αριθμήσιμη, πεπερασμένη προσθετικότητα καταλήγουμε στο μέτρο Jordan. Για το μέτρο Jordan με το οποίο θα ασχοληθούμε στη συνέχεια απαιτούμε την κλειστότητα μιας μη κενής οικογένειας συνόλων ως προς την ένωση και την τομή πεπερασμένου πλήθους συνόλων που ανήκουν σ' αυτήν.

Ακολουθώντας το βιβλίο των Laczkovich & Sós (2017) θα ορίσουμε το μέτρο Jordan για ένα φραγμένο χωρίο του R^2. Κάθε φραγμένο χωρίο Q του R^2 μπορεί να προσεγγιστεί από ενώσεις πεπερασμένου πλήθους ορθογωνίων R_i της μορφής $I_{i_1} \times I_{i_2}$, όπου I_{i_1} και I_{i_2} κλειστά διαστήματα, που καλύπτουν το χωρίο. Με βάση αυτή την προσέγγιση μπορεί να οριστεί ένα μέτρο το οποίο καλείται εξωτερικό μέτρο Jordan του Q και συμβολίζεται με $\mu^*(Q)$. Το $\mu^*(Q)$ ορίζεται ως το infimum του συνόλου των αθροισμάτων $\sum_{i=1}^{K} \mu(R_i)$ που παίρνουμε για κάθε κάλυψη. Αν το χωρίο προσεγγιστεί από ενώσεις πεπερασμένου σε αριθμό μη επικαλυπτόμενων ανά δύο ορθογωνίων $\bar{R}_i$ που ανήκουν σε αυτό τότε παίρνουμε το εσωτερικό μέτρο Jordan που ορίζεται σαν το supremum του συνόλου των αθροισμάτων $\sum_{i=1}^{J} \mu(\bar{R}_i)$ και συμβολίζεται με $\mu_*(Q)$. Ορίζουμε ως μη επικαλυπτόμενα ορθογώνια αυτά τα οποία δεν έχουν κανένα κοινό εσωτερικό σημείο. Στην περίπτωση που το χωρίο δεν περιλαμβάνει εσωτερικά σημεία $\mu_*(Q) = 0$. Ένα χωρίο $Q \subseteq R^2$ είναι μετρήσιμο κατά Jordan ή απλώς Jordan αν το Q είναι φραγμένο και αν $\mu^*(Q) = \mu_*(Q)$. Σε αυτή την περίπτωση το μέτρο Jordan $\mu(Q)$ είναι εξ' ορισμού $\mu(Q) \equiv \mu^*(Q)$ =$\mu_*(Q)$. Επιπλέον αποδεικνύεται ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα φραγμένο χωρίο μετρήσιμο κατά Jordan είναι το σύνορο του να έχει μηδενικό εξωτερικό μέτρο Jordan και επομένως μηδενικό εμβαδόν. Επίσης αποδεικνύεται ότι η ιδιότητα της πεπερασμένης προσθετικότητας ισχύει ακόμη και αν τα σύνολα δεν είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους αλλά απλώς μη επικαλυπτόμενα. Η οικογένεια των συνόλων που είναι μετρήσιμα κατά Jordan είναι ένας δακτύλιος συνόλων, δηλαδή η ένωση και η τομή πεπερασμένου πλήθους μετρήσιμων συνόλων είναι επίσης μετρήσιμο σύνολο κατά Jordan.

Σε ότι αφορά τα γεωμετρικά σχήματα του σχολικού βιβλίου κάνουμε την υπόθεση ότι το σύνορό τους έχει μηδενικό εμβαδόν, δηλαδή μηδενικό μέτρο, και επομένως είναι μετρήσιμα κατά Jordan. Κατά συνέπεια θεωρούμε ότι το μέτρο Jordan είναι επαρκές για τη θεωρητική προσέγγιση της έννοιας του εμβαδού για τα ομαλά σχήματα τα οποία διαπραγματεύεται η σχολική ύλη και δεν υπάρχει λόγος να καταφύγει κάποιος στην επέκτασή του, το μέτρο Lebesgue. Άλλωστε για σύνολα μετρήσιμα κατά Jordan το μέτρο Jordan ταυτίζεται με το μέτρο Lebesgue.

Με βάση το μέτρο των στοιχειωδών υποσυνόλων του R^2 που ορίζονται από διαστήματα μήκους 1 μονάδας σε κάθε άξονα του συστήματος συντεταγμένων προκύπτει ότι το μέτρο που έχει καθένα από τα τετράγωνα στα οποία έχουν διαιρεθεί τα γεωμετρικά σχήματα του Σχήματος 1 είναι 1 τετραγωνική μονάδα (τ.μ.) ως απόρροια της ιδιότητας (3). Επομένως, δεχόμενοι στη σχολική τάξη αξιωματικά ότι ένα τετράγωνο πλευράς 1 μονάδας έχει μέτρο επιφανείας 1 τ.μ. προχωρούμε στη μέτρηση της επιφάνειας επιπέδων σχημάτων καταμετρώντας το πλήθος των μη επικαλυπτόμενων τετραγώνων που περιλαμβάνονται σ' αυτή. Το εμβαδόν προκύπτει από την εφαρμογή της ιδιότητας της πεπερασμένης προσθετικότητας για το μέτρο Jordan.

Η απλή καταμέτρηση των τετραγώνων που απαρτίζουν το γεωμετρικό σχήμα Α ώστε να προσδιοριστεί το εμβαδόν του δεν αποδίδει για το γεωμετρικό σχήμα Β του Σχήματος 1 αφού δεν καλύπτεται πλήρως μόνο από τετράγωνα. Προτείνουμε στη συνέχεια μία διδακτική παρέμβαση στα πλαίσια του διδακτικού μετασχηματισμού που απορρέει από τη θεωρία μέτρου ώστε να προσδιοριστεί το εμβαδόν και αυτού του γεωμετρικού σχήματος. Αφού η μέτρηση του εμβαδού στηρίζεται στην καταμέτρηση του πλήθους των τετραγώνων θα μπορούσαν οι μαθητές στην τάξη σε μια πρώτη προσέγγιση να δώσουν μία τιμή που πλησιάζει το πραγματικό εμβαδόν του χωρίου καταμετρώντας μόνο τετράγωνα τα οποία βρίσκονται εντός του σχήματος. Έτσι θα κατέληγαν ότι το εμβαδόν του χωρίου είναι οπωσδήποτε πάνω από 10 τ.μ., μία τιμή η οποία αποτελεί μία προσέγγιση από κάτω της πραγματικής τιμής του εμβαδού. Στη συνέχεια τούς ζητείται να δώσουν μία τιμή που πλησιάζει το εμβαδόν προσμετρώντας και τετράγωνα που δε βρίσκονται εξ' ολοκλήρου εντός του σχήματος. Συμπεριλαμβάνοντας ολόκληρα τα τετράγωνα που διατάσσονται κατά μήκος της υποτείνουσας του ορθογωνίου τριγώνου καταλήγουν ότι η τιμή του εμβαδού είναι οπωσδήποτε κάτω από 15 τ.μ, μία τιμή η οποία αποτελεί μία προσέγγιση από πάνω της πραγματικής τιμής του εμβαδού. Κατά αυτόν τον τρόπο, χωρίς ουσιαστικά οι μαθητές να συνειδητοποιούν το θεωρητικό υπόβαθρο που υπάρχει αλλά απλά και μόνο μέσω της παρατήρησης έρχονται σε επαφή με τις έννοιες του εσωτερικού και του εξωτερικού μέτρου Jordan. Στη συνέχεια επιχειρούνται καλύτερες προσεγγίσεις με στόχο οι τιμές των κάτω και άνω φραγμάτων να πλησιάσουν μεταξύ τους. Οι μαθητές καθοδηγούνται στο να συμπεράνουν από τις γεωμετρικές του ιδιότητες το σχήμα που προκύπτει αν μεταφέρουν και περιστρέψουν κατάλληλα δύο από τα μικρά τρίγωνα που διατάσσονται κατά μήκος της υποτείνουσας του μεγάλου τριγώνου. Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουν ότι από 4 ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα με την υποτείνουσά τους να βρίσκεται πάνω στην υποτείνουσα του μεγάλου τριγώνου προκύπτουν άλλα 2 ολόκληρα τετράγωνα. Επομένως μια πιο εκλεπτυσμένη προσέγγιση κάλυψης του χωρίου από κάτω μέσω της επιλογής μη επικαλυπτόμενων συνόλων οδηγεί σε μία επαυξημένη τιμή που είναι 12 τ.μ.. Με αντίστοιχη λογική για σύνολα που υπερκαλύπτουν το χωρίο μπορούμε να βελτιώσουμε την προσέγγιση από πάνω εξαιρώντας άρτιο αριθμό τριγώνων αφού συνεισφέρουν μισό αριθμό τετραγώνων. Συγκεκριμένα εξαιρώντας 2 τετράγωνα η εκτίμηση για το εξωτερικό μέτρο Jordan γίνεται 13 τ.μ.. Το επόμενο και τελικό βήμα είναι η εκτίμηση από τους μαθητές ότι ένα μικρό τρίγωνο έχει το μισό του εμβαδού ενός τετραγώνου αφού 2 τέτοια ίσα τρίγωνα συνθέτουν ένα τετράγωνο. Μετά από συνυπολογισμό των μικρών τριγώνων καταλήγουν οι μαθητές στην τιμή 12.5 τ.μ. για το εμβαδόν του χωρίου που είναι άλλωστε το μέτρο Jordan του χωρίου αφού καταλήγουμε σε ταυτόσημες τιμές του κάτω και άνω φράγματος.

Το γεγονός ότι το εμβαδόν του μικρού τριγώνου έχει το μισό του εμβαδού ενός τετραγώνου που προκύπτει από αναδιάταξη 2 τέτοιων ίσων τριγώνων είναι συμβατό με τη θεωρία μέτρου. Ένα θεώρημα απαραίτητο για τον υπολογισμό του εμβαδού χωρίων τα οποία έχουν υποστεί ειδικούς μετασχηματισμούς παρατίθεται ευθύς αμέσως από το Κεφάλαιο 3 του βιβλίου των Laczkovich & Sós (2017).

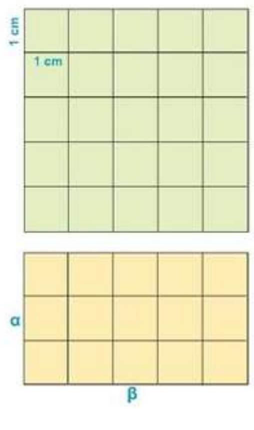
Θεώρημα 1: Ας θεωρήσουμε τον αντιστρέψιμο γραμμικό μετασχηματισμό $L: R^2 \to R^2$ και $b \in R^2$. Τότε για κάθε μετρήσιμο κατά Jordan σύνολο $E \subset R^2$ το σύνολο $LE + b = \{Lx + b: x \in E\}$ είναι μετρήσιμο κατά Jordan και

$$\mu(LE + b) = |\det L| \mu(E).$$

Ένα από τα αποτελέσματα της προηγούμενης σχέσης είναι ότι το μέτρο Jordan παραμένει αναλλοίωτο σε μετατοπίσεις, στροφές και κατοπτρισμούς ($|det\, L| = 1$). Επειδή τα δύο τρίγωνα που συνθέτουν το τετράγωνο αποτελούν το ένα κατοπτρισμό του άλλου αυτά έχουν το ίδιο μέτρο ως συνέπεια του Θεωρήματος 1. Στην περίπτωση μας, βέβαια, το τετράγωνο προκύπτει από αναδιάταξη των 2 ίσων ισοσκελών ορθογωνίων τριγώνων που βρίσκονται κατά μήκος της υποτείνουσας του μεγάλου τριγώνου με το ένα εξ αυτών να έχει υποστεί κατοπτρισμό και μετάθεση. Η ισότητα των εμβαδών των τριγώνων μετά την αναδιάταξη απορρέει από τη διατήρηση του μέτρου, σύμφωνα με το Θεώρημα 1, εκείνου εκ των τριγώνων που έχει υποστεί τους μετασχηματισμούς. Ως απόρροια της πεπερασμένης προσθετικότητας του μέτρου Jordan το μέτρο της ένωσης των δύο μη επικαλυπτόμενων τριγώνων ισούται με το μέτρο του τετραγώνου που είναι το αποτέλεσμα της ένωσης. Το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει μήκος πλευράς 1 μονάδα, όσο και το μήκος των ίσων πλευρών των ισοσκελών τριγώνων, είναι 1 τ.μ.. Επομένως το εμβαδόν των τριγώνων που διατάσσονται κατά μήκος της υποτείνουσας του μεγάλου τριγώνου είναι 0.5 τ.μ..

Η ίδια μεθοδολογία μπορεί να εφαρμοστεί για τον υπολογισμό του εμβαδού του γεωμετρικού σχήματος Γ και να επαληθευτεί ότι είναι το άθροισμα των εμβαδών των γεωμετρικών σχημάτων Α και Β. Με αντίστοιχη λογική θα μπορούσαν να υπολογιστούν εμβαδά σχημάτων τα οποία αποτελούνται εκτός από ολόκληρα τετράγωνα και από κλάσματα αυτών.

Για τη συνέχεια επιχειρείται στο σχολικό βιβλίο η κατάργηση της χρήσης του πλέγματος τετραγώνων ώστε να προκύψουν σχέσεις που εμπλέκουν αποκλειστικά το μήκος, το οποίο είναι δυνατόν να μετρηθεί με τη βοήθεια χάρακα. Συγκεκριμένα όπως μπορούμε να δούμε στο Σχήμα 2 που παρατίθεται αυτούσιο από το σχολικό βιβλίο παρουσιάζονται τα παραδείγματα ενός τετραγώνου και ενός ορθογωνίου που χωρίζονται σε έναν ακέραιο αριθμό μικρότερων τετραγώνων.



Σχήμα 2. Υπολογισμός εμβαδού τετραγώνου και ορθογωνίου

Το εμβαδόν των σχημάτων προκύπτει καταμετρώντας το πλήθος των τετραγώνων που περιλαμβάνεται στο καθένα. Κατόπιν γίνεται ο συσχετισμός ότι στο τετράγωνο μία οριζόντια πλευρά του περιλαμβάνει τόσα τετράγωνα όσα και το μήκος της αφού το μήκος της πλευράς κάθε μικρού τετραγώνου είναι 1 ενώ μία κάθετη πλευρά μπορεί να διαιρεθεί σε τόσες γραμμές μικρών τετραγώνων όσο το μήκος της αφού το μήκος της πλευράς κάθε μικρού τετραγώνου είναι 1. Επειδή η κάθε πλευρά του τετραγώνου έχει το ίδιο μήκος καταλήγουμε στο συμπέρασμα:

Το εμβαδό ενός τετραγώνου πλευράς α είναι α^2.

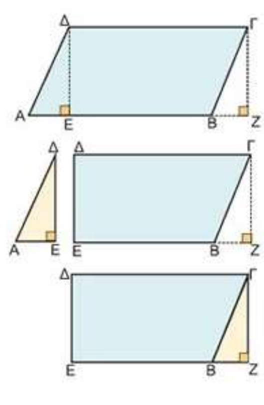
Με αντίστοιχη αιτιολόγηση μπορούμε να οδηγηθούμε στον τύπο που δίνει το εμβαδόν του ορθογωνίου. Η μόνη διαφορά έγκειται στο ότι οι δύο πλευρές που είναι κάθετες μεταξύ τους διαφέρουν σε μήκος. Επομένως το συμπέρασμα στην περίπτωση αυτή είναι:

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με πλευρές α και β είναι $\alpha \cdot \beta$.

Το σχολικό βιβλίο δε διαπραγματεύεται την περίπτωση που το μήκος μιας πλευράς περιλαμβάνει και δεκαδικό μέρος αφήνοντας σιωπηρά να εννοηθεί ότι ισχύει ο ίδιος τύπος. Κάποιος θα μπορούσε στην περίπτωση αυτή να επεκτείνει τη λογική με τη διαίρεση σε μικρά τετράγωνα όπου το μήκος της πλευράς τους είναι ίσο με την αξία του μικρότερου σε αξία δεκαδικού ψηφίου. Κάθε μικρό τετράγωνο αποτελεί ένα στοιχειώδες σύνολο Α του R^2 με $l(A) =$ αξία^2. Επομένως από την ιδιότητα (3) γνωρίζουμε ότι $\mu(A) = l(A)$. Το εμβαδόν δίνεται ως το γινόμενο του πλήθους των τετραγώνων που περιλαμβάνονται στο χωρίο με το $\mu(A)$ εκφρασμένο σε τ.μ.. Προφανώς, η μεθοδολογία που προτείνουμε καταλήγει στον ίδιο τύπο για το εμβαδόν του τετραγώνου και του ορθογωνίου αφού αν η αξία του λιγότερο σημαντικού ψηφίου πολλαπλασιαστεί με το πλήθος των τετραγώνων στα οποία διαιρείται η κάθε πλευρά θα δώσει το μήκος της κάθε πλευράς. Για παράδειγμα, αν δοθεί ως μήκος πλευράς τετραγώνου 9.65 cm, τότε θα διαιρέσουμε το χωρίο σε 965 μικρά τετράγωνα με μήκος πλευράς 0.01 cm. Τότε $\mu(A) = 0.01^2$ cm^2. Επομένως το εμβαδόν του χωρίου θα προκύψει ως το γινόμενο $965 \cdot 965 \cdot \mu(A) = 9.65^2$ cm^2.

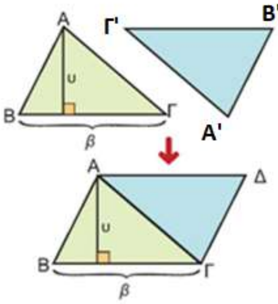
Στη μεθοδολογία που παρουσιάζει το σχολικό βιβλίο για τον υπολογισμό του εμβαδού παραλληλογράμμου γίνεται τεμαχισμός του εμβαδού σε δύο τμήματα με τη βοήθεια του ύψους που φέρουμε από μία κορυφή του στην απέναντι πλευρά. Το ένα εκ των δύο τμημάτων όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3 είναι ορθογώνιο τρίγωνο. Με βάση τη θεωρία μέτρου λόγω της πεπερασμένης προσθετικότητας το μέτρο του χωρίου ΑΒΓΔ είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων των χωρίων ΑΔΕ και ΔΓΒΕ. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα αφού ΑΔ=ΒΓ ως απέναντι παράλληλες πλευρές του παραλληλογράμμου. Επιπλέον η απόσταση μεταξύ των παραλλήλων πλευρών ΓΔ και ΑΒ παραμένει σταθερή από όποια κορυφή και αν την υπολογίσουμε και είναι το ύψος του παραλληλογράμμου ως προς βάση την πλευρά ΑΒ. Επομένως ΔΕ=ΓΖ. Σύμφωνα με ένα εκ των κριτηρίων ισότητας των ορθογωνίων τριγώνων επειδή τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ έχουν δύο από τις αντίστοιχες πλευρές τους ίσες προκύπτει ότι είναι ίσα. Σύμφωνα με την ιδιότητα (5) ή το Θεώρημα 1 το μέτρο του ΒΓΖ είναι ίσο με το μέτρο του ΑΔΕ αφού το ένα είναι οριζόντια μετατόπιση του άλλου. Έτσι καταλήγουμε σε ένα χωρίο που είναι ορθογώνιο και το εμβαδόν του μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο που δόθηκε για το ορθογώνιο.

Σχήμα 3. Υπολογισμός εμβαδού παραλληλογράμμου



Στην τάξη η επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος αντιμετωπίζεται πρακτικά με απλή αναφορά στην ισότητα των σχημάτων, εν προκειμένω των τριγώνων, αφού τα κριτήρια ισότητάς τους διδάσκονται στην επόμενη τάξη. Γίνεται η παρατήρηση ότι αν σε ένα παραλληλόγραμμο αποκόψω το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται φέροντας το ύψος του μπορώ να το τοποθετήσω στα δεξιά του παραλληλογράμμου με την υποτείνουσα του να ταυτίζεται με την πλευρά ΒΓ. Έτσι καλύπτω επακριβώς το χώρο που δημιουργείται αν φέρω το ύψος από την κορυφή Γ στην πλευρά ΑΒ ώστε να σχηματιστεί ένα ορθογώνιο. Η οριζόντια πλευρά ΕΖ του ορθογωνίου ταυτίζεται με το μήκος της οριζόντιας πλευράς ΑΒ του παραλληλογράμμου σαν αποτέλεσμα της ισότητας των ορθογωνίων τριγώνων ενώ η κάθετη είναι ίση με το ύψος του παραλληλογράμμου ως προς βάση που είναι η οριζόντια πλευρά. Επομένως καταλήγουμε στο αποτέλεσμα:

Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου είναι ίσο με το γινόμενο μίας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος.



Σχήμα 4: Υπολογισμός εμβαδού τριγώνου

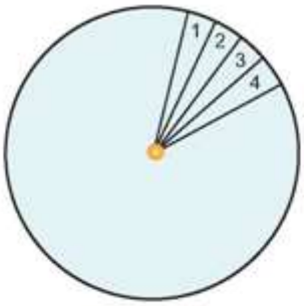
Εξετάζουμε στη συνέχεια τον υπολογισμό του εμβαδού ενός τυχαίου τριγώνου. Εφόσον σύμφωνα με το Θεώρημα 1 κάτω από ένα μετασχηματισμό στροφής το μέτρο του χωρίου παραμένει αναλλοίωτο παίρνουμε ένα αντίγραφο του αρχικού τριγώνου το οποίο περιστρέφουμε κατά 180^o όπως φαίνεται στο Σχήμα 4 που παρατίθεται από το σχολικό βιβλίο. Τα τονούμενα γράμματα στο περιεστραμμένο τρίγωνο δεν περιλαμβάνονται στο σχήμα του βιβλίου και προστέθηκαν από εμάς ώστε να δείχνουν την αντιστοίχιση των κορυφών με το αρχικό τρίγωνο. Στο τετράπλευρο που προκύπτει όταν πλησιάσουμε την πλευρά Γ΄Α΄ του περιεστραμμένου τριγώνου ώστε να συμπέσει με την ΑΓ του αρχικού η κορυφή Β΄ μετονομάζεται σε Δ. Στα τρίγωνα ΒΑΓ και ΔΓΑ με το δεύτερο να προέρχεται από περιστροφή του πρώτου κατά 180^o οι αντίστοιχες προσκείμενες γωνίες στην κοινή πλευρά ΑΓ των δύο τριγώνων είναι ίσες. Λόγω ισότητας των εντός εναλλάξ γωνιών $B\hat{A}\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}\Delta$ οι πλευρές ΑΒ και ΔΓ είναι μεταξύ τους παράλληλες. Αντίστοιχα οι πλευρές ΒΓ και ΑΔ είναι παράλληλες λόγω ισότητας των γωνιών $B\hat{\Gamma}A$ και $\Gamma\hat{A}\Delta$. Επομένως προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Από την ιδιότητα της προσθετικότητας προκύπτει ότι το τελικό σχήμα θα έχει διπλάσιο εμβαδόν από το αρχικό τρίγωνο.

Στο σχολικό βιβλίο δεν παρουσιάζονται επιχειρήματα ώστε να αιτιολογηθεί γιατί το τελικό σχήμα είναι παραλληλόγραμμο αλλά η προσέγγιση που ακολουθείται είναι διαισθητική. Επειδή το σχήμα που παράχθηκε οφείλεται σε διπλασιασμό του αρχικού τριγώνου καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

Το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινομένου μιας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος.

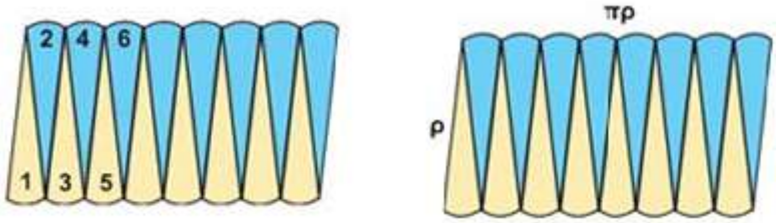
Με αντίστοιχους συλλογισμούς υπολογίζεται το εμβαδόν του τραπεζίου αφού με διπλασιασμό του αρχικού σχήματος μπορεί το τραπέζιο να καταλήξει σε παραλληλόγραμμο του οποίου το εμβαδόν γνωρίζουμε να υπολογίζουμε.

Ολοκληρώνοντας τη μελέτη μας πάνω στα εμβαδά των επιπέδων σχημάτων θα αναφερθούμε στο εμβαδόν κυκλικού δίσκου. Στο σχολικό βιβλίο η διδασκαλία του μήκους κύκλου προηγείται της διδασκαλίας του εμβαδού ενώ για το μήκος του κύκλου ο τύπος παρέχεται κατ' ευθείαν. Για να καταλήξει το σχολικό βιβλίο στον τύπο που δίνει το εμβαδό κυκλικού δίσκου παρουσιάζει ένα διαχωρισμό του κυκλικού δίσκου σε τομείς, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5. Με κατάλληλη αναδιάταξη



Σχήμα 5: Διαχωρισμός του κυκλικού δίσκου σε κυκλικούς τομείς

των κυκλικών τομέων στους οποίους χωρίζεται ο κυκλικός δίσκος ακτίνας ρ προκύπτει το Σχήμα 6 του σχολικού βιβλίου το οποίο κατά τους συγγραφείς προσεγγίζει όλο και περισσότερο ένα ορθογώνιο καθώς μικραίνουν οι περιοχές στις οποίες χωρίζεται ο κυκλικός δίσκος και αυξάνει ο αριθμός τους. Το μήκος της μεγάλης πλευράς του ορθογωνίου αυτού είναι $\pi\rho$ που είναι το μισό του μήκους του κύκλου, ενώ το μήκος της μικρής πλευράς είναι ίσο με ρ. Είναι φανερό ότι λόγω του Θεωρήματος 1 και της προσθετικότητας των εμβαδών η αναδιάταξη των κυκλικών τομέων παράγει σχήμα το οποίο έχει το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου σε όλα τα στάδια αλλά μόνο στο όριο που ο αριθμός τους τείνει στο άπειρο το χωρίο τείνει σε ορθογώνιο και το εμβαδόν του είναι υπολογίσιμο. Επομένως απουσιάζει μια οριακή διαδικασία που προσεγγίζει σε βήματα την πραγματική τιμή του εμβαδού.



Σχήμα 6: Αναγωγή του εμβαδού κυκλικού δίσκου σε εμβαδόν ορθογωνίου

Αν θέλαμε να μείνουμε πιστοί στη βασική φιλοσοφία της πρότασης των συγγραφέων του σχολικού βιβλίου που προσεγγίζει οριακά το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου με εμβαδόν ορθογωνίου θα αντιπροτείναμε μια προσέγγιση που αναδιατάσσει ισοσκελή τρίγωνα αντί να αναδιατάσσει κυκλικούς τομείς και προσεγγίζει το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου με παραλληλόγραμμα σε όλα τα ενδιάμεσα στάδια και όχι μόνο οριακά. Η πρότασή μας κάνει χρήση της διαδικασίας που ακολούθησε ο Αρχιμήδης για τον υπολογισμό του π που στηρίζεται στο ότι τα εγγεγραμμένα και τα περιγεγραμμένα στον κύκλο κανονικά πολύγωνα όταν το πλήθος των πλευρών τους τείνει στο άπειρο έχουν σαν κοινό όριο της περιμέτρου τους την περιφέρεια του κύκλου. Αντίστοιχα, το κοινό όριο των εμβαδών τους είναι το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου. Να επισημάνουμε εδώ ότι η κατασκευή κανονικών πολυγώνων περιλαμβάνεται στην ύλη της Β΄ Γυμνασίου και προηγείται του εμβαδού κυκλικού δίσκου. Σύμφωνα με τη λογική αυτή σχεδιάζουμε εγγεγραμμένο κανονικό πολύγωνο στον κύκλο και θεωρούμε τα τρίγωνα που δημιουργούνται αν φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν το κέντρο του κύκλου με τις κορυφές του πολυγώνου. Η αναδιάταξη ανά δύο των ισοσκελών τριγώνων ώστε η βάση του ενός να βρίσκεται απέναντι από τη βάση του άλλου με μία πλευρά κοινή οδηγεί σε ένα τετράπλευρο που είναι πλάγιο παραλληλόγραμμο. Αυτό συμβαίνει επειδή οι περιεχόμενες μεταξύ των ίσων πλευρών των τριγώνων γωνίες είναι ίσες ενώ επιπλέον η σχετική τους θέση ως εντός εναλλάξ οδηγεί στην παραλληλία των απέναντι πλευρών του τετράπλευρου που έχουν μήκη ίσα με την ακτίνα του κύκλου. Με αντίστοιχο επιχείρημα αποδεικνύεται η παραλληλία των βάσεων των δύο ισοσκελών τριγώνων που τοποθετούνται απέναντι με δεδομένο ότι οι προσκείμενες στις βάσεις γωνίες των ισοσκελών τριγώνων είναι όλες ίσες. Συνενώνοντας τα πλάγια παραλληλόγραμμα που θα προκύψουν αν πάρουμε ανά δύο τα τρίγωνα μέχρις εξαντλήσεως τους καταλήγουμε σε ένα μεγαλύτερο πλάγιο παραλληλόγραμμο. Έτσι αν εγγράψουμε πολύγωνο με 2ν πλευρές η μία πλευρά του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται έχει μήκος ίσο με το ήμισυ της περιμέτρου του πολυγώνου ενώ το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτήν την πλευρά ισούται με την απόσταση μιας πλευράς του πολυγώνου από το κέντρο του κύκλου (απόστημα). Βάσει της αθροιστικής ιδιότητας των εμβαδών το εμβαδόν του πολυγώνου ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου. Για πολύγωνο με 2ν πλευρές η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι μη παράλληλες πλευρές του παραλληλογράμμου είναι $\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)$. Καθώς εγγράφουμε στον κύκλο πολύγωνα με μεγαλύτερο πλήθος πλευρών η πιο πάνω γωνία τείνει να γίνει $\frac{\pi}{2}$, τα πλάγια παραλληλόγραμμα τείνουν να γίνουν ορθογώνια, το ύψος τους πλησιάζει την ακτίνα του κύκλου, το μήκος των βάσεων των ισοσκελών τριγώνων προσεγγίζει το μήκος των αντίστοιχων τόξων και το μήκος της αντίστοιχης στο ύψος πλευράς του παραλληλογράμμου που έχει μήκος ίσο με το ήμισυ της περιμέτρου του πολυγώνου πλησιάζει το ήμισυ της περιφέρειας του κύκλου. Ως αποτέλεσμα το εμβαδόν του ορθογωνίου που προέκυψε τείνει στην τιμή $\pi\rho^2$ που είναι και το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.

Τα ισοσκελή τρίγωνα της παραπάνω θεώρησης ανήκουν προφανώς σε αντίστοιχους κυκλικούς τομείς και η αναδιάταξή τους μπορεί να θεωρηθεί ότι οδηγεί σε αναδιάταξη αυτών των κυκλικών τομέων σύμφωνα με την πρόταση του σχολικού βιβλίου. Όταν ο αριθμός των πλευρών του κανονικού πολυγώνου τείνει στο άπειρο οι πλευρές του τείνουν να συμπέσουν με τα τόξα των αντίστοιχων κυκλικών τομέων και το σχήμα που προκύπτει από την αναδιάταξη των κυκλικών τομέων πράγματι τείνει στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο της δικής μας θεώρησης παρέχοντας κατ’ αυτόν τον τρόπο μία απόδειξη των ισχυρισμών του σχολικού βιβλίου.

Μπορούμε εναλλακτικά να υπολογίσουμε το εμβαδόν του εγγεγραμμένου στον κύκλο κανονικού πολυγώνου χωρίς αναδιάταξη των ισοσκελών τριγώνων. Να επισημάνουμε ότι ο τύπος για το εμβαδόν τριγώνου έχει ήδη παρατεθεί και επομένως μπορεί το εμβαδόν κανονικού πολυγώνου να αναχθεί σε άθροισμα εμβαδών τριγώνων αντί να αναχθεί σε εμβαδόν παραλληλογράμμου. Αυτός ο τρόπος υπολογισμού έχει υιοθετηθεί από το σχολικό βιβλίο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας της Β’ Λυκείου (Αργυρόπουλος, Βλάμος, Κατσούλης, Μαρκάτης, & Σιδέρης, 2012). Το εμβαδόν μιας τριγωνικής περιοχής δίνεται από τον τύπο

$\frac{1}{2}\beta\acute{\alpha}\sigma\eta \cdot \acute{\upsilon}\psi o\varsigma$. Θεωρούμε ως βάση την πλευρά του κανονικού πολυγώνου οπότε το ύψος είναι το απόστημα του πολυγώνου. Αθροίζοντας τα εμβαδά των ισοσκελών τριγώνων με το ύψος ως κοινό παράγοντα το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου ισούται με $\frac{1}{2}\acute{\upsilon}\psi o\varsigma \cdot \pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma$, όπου η περίμετρος είναι η περίμετρος του πολυγώνου. Καθώς ο αριθμός ν των πλευρών του κανονικού πολυγώνου γίνεται πολύ μεγάλος το ύψος των ισοσκελών τριγώνων τείνει στην ακτίνα ρ του κύκλου ενώ το μήκος της βάσης με τη σειρά του προσεγγίζει το μήκος του αντίστοιχου τόξου. Επομένως η περίμετρος του κανονικού πολυγώνου πλησιάζει το μήκος $2\pi\rho$ της περιφέρειας του κύκλου με αποτέλεσμα να οδηγούμαστε στον τύπο $\pi\rho^2$ για το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.

Η προσέγγιση αυτή έχει το πλεονέκτημα της άμεσης σύνδεσης με τη θεωρία του απειροστικού λογισμού και τον υπολογισμό του μέτρου Jordan του κυκλικού δίσκου. Σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα που παραθέτουμε από το Κεφάλαιο 4 του βιβλίου των Laczkovich & Sós (2017) η ιδιότητα ενός χωρίου να είναι μετρήσιμο κατά Jordan συνδέεται με την ολοκληρωσιμότητα κατά Riemann .

Θεώρημα 2: Ένα χωρίο $Q \subseteq R^2$ είναι μετρήσιμο κατά Jordan αν και μόνο αν η χαρακτηριστική του συνάρτηση $\chi_Q = \begin{cases} 1, x \in Q \\ 0, x \notin Q \end{cases}$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann. Στην περίπτωση αυτή το μέτρο Jordan του χωρίου Q είναι το ολοκλήρωμα Riemann της χαρακτηριστικής συνάρτησης

$$\mu(Q) = \int_{R^2} \chi_Q.$$

Με χρήση του ολοκληρωτικού λογισμού, αν συμβολίσουμε με du το μήκος της χορδής του εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου που για ν πολύ μεγάλο πλησιάζει το μήκος του τόξου ds, το άθροισμα των εμβαδών των στοιχειωδών τριγώνων στα οποία διαχωρίζεται το εγγεγραμμένο κανονικό πολύγωνο ισοδυναμεί με τη διαδικασία ολοκλήρωσης ως προς s, οπότε παίρνουμε για το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου

$$E = \int_0^{2\pi\rho} \frac{1}{2}\rho \; ds = \left[\frac{1}{2}\rho s\right]_0^{2\pi\rho} = \pi\rho^2.$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα ως το διπλό ολοκλήρωμα Riemann της χαρακτηριστικής συνάρτησης του κυκλικού χωρίου που παίρνει τιμή 1 για σημεία που ανήκουν στο χωρίο και την τιμή 0 οπουδήποτε αλλού

$$E = \iint_S 1dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\rho^2 d\theta = \int_0^{2\pi\rho} \frac{1}{2}\rho ds.$$

Εδώ έγινε χρήση της σχέσης $s = \rho\theta$ από όπου $ds = \rho d\theta$ καθόσον το ρ παραμένει σταθερό. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι πράγματι ο υπολογισμός του εμβαδού του κυκλικού δίσκου σύμφωνα με την εναλλακτική πρόταση υπολογισμού ισοδυναμεί με την απόδοση μέτρου Jordan στον κυκλικό δίσκο με βάση το Θεώρημα 2.

Ο υπολογισμός του εμβαδού του εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου από τον τύπο $\frac{1}{2}\alpha\pi\acute{o}\sigma\tau\eta\mu\alpha \cdot \pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma$ προφανώς ισχύει και για περιγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα με τη μόνη διαφορά ότι το απόστημα στην περίπτωση αυτή ισούται εξ αρχής με την ακτίνα του κύκλου. Όταν το πλήθος των πλευρών τους τείνει στο άπειρο έχουν και αυτά ως όριο της περιμέτρου τους την περιφέρεια του κύκλου. Επομένως, παίρνουμε την ίδια τιμή για το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου προσεγγίζοντάς το ως το εμβαδόν γεωμετρικών σχημάτων που τον καλύπτουν πλήρως. Η προσέγγιση του εμβαδού του κυκλικού δίσκου από το εμβαδόν σχημάτων που ανήκουν εξ ολοκλήρου σε αυτό (εγγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα) και από το εμβαδόν σχημάτων που τον καλύπτουν πλήρως (περιγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα) τα οποία έχουν κοινό όριο είναι σε συμφωνία με τον ορισμό του εμβαδού ως η κοινή τιμή του εσωτερικού και του εξωτερικού μέτρου Jordan του χωρίου.

Οι συγγραφείς του σχολικού βιβλίου μένουν πιστοί στη μεθοδολογία που ακολούθησαν που περιλαμβάνει αναδιάταξη σχημάτων ώστε είτε να προκύψουν σχήματα με εμβαδόν που μπορεί να υπολογιστεί είτε το τελικό σχήμα να προκύψει ως ένωση σχημάτων με γνωστό εμβαδόν. Στην περίπτωση όμως του εμβαδού του κυκλικού δίσκου η αναδιάταξη καταλήγει σε σχήμα με γνωστό τύπο εμβαδού μόνο οριακά δεδομένου ότι το εμβαδόν των αναδιατασσόμενων κυκλικών τομέων δεν είναι γνωστό. Επιπλέον η διαδικασία που ακολουθούν δεν έχει ανάλογο στον υπολογισμό του εμβαδού με βάση τον απειροστικό λογισμό και τη θεωρία μέτρου σε αντίθεση με την εναλλακτική πρόταση.

Συμπεράσματα

Οι συγγραφείς του σχολικού βιβλίου αντιλαμβανόμενοι το ρόλο της οπτικής αντίληψης στη επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων δεν προβαίνουν σε μία απλή παράθεση των τύπων του εμβαδού βασικών γεωμετρικών σχημάτων αλλά στοχεύουν μέσα από μία διαισθητική αποδεικτική διαδικασία να εκπαιδεύσουν τους μαθητές στην αναδιάρθρωση των γεωμετρικών σχημάτων ώστε να καταλήξουν σε γνωστούς τύπους εμβαδών. Μέσα από τον υπολογισμό του εμβαδού χωρίων ακόμα και των πιο απλών εμπεδώνεται η αθροιστική ιδιότητα των εμβαδών όταν έχουμε ένωση μη επικαλυπτόμενων χωρίων. Όταν καλούνται όμως οι μαθητές να υπολογίσουν ή να συσχετίσουν το εμβαδόν χωρίων που είναι είτε ένωση είτε συμπλήρωμα χωρίων που έχουν γνωστό εμβαδόν έρχονται αντιμέτωποι με μη γνώριμες καταστάσεις. Η επιτυχημένη αντιμετώπιση της νέας κατάστασης ισοδυναμεί κατά τη Douady με έναν μετασχηματισμό της έννοιας του εμβαδού από εργαλείο σε αντικείμενο για την λύση. Καθώς στους μαθητές παρουσιάζονται στα πλαίσια ασκήσεων σχήματα που η θέση τους στο επίπεδο υφίσταται περιστροφή ή κατοπτρισμό σε σχέση με τα σχήματα μέσω των οποίων διδάχθηκαν τη θεωρία ενισχύεται η ικανότητά τους να απομονώνουν κατά Vergnaud τις συσχετιστικές αναλλοίωτες που αναδύονται σε προβλήματα υπολογισμού εμβαδού.

Από όσα περιγράψαμε γίνεται εμφανές ότι το αντικείμενο του υπολογισμού εμβαδών γεωμετρικών σχημάτων εκπορεύεται από τη μαθηματική θεωρία μέτρου η οποία όμως στα πλαίσια της σχολικής τάξης υφίσταται μετασχηματισμούς που την καθιστούν προσβάσιμη στους μαθητές της Β' Γυμνασίου. Με μόνη παραδοχή το εμβαδόν τετραγώνου με μήκος πλευράς 1 τ.μ., δηλαδή ενός απλού υποσυνόλου του R^2, μπορεί να θεμελιωθεί βήμα-βήμα η διαδικασία υπολογισμού του εμβαδού βασικών γεωμετρικών σχημάτων χωρίς να περιέρχεται σε γνώση των μαθητών η χρήση των ιδιοτήτων της συνάρτησης μέτρου καθώς και των σχετικών θεωρημάτων. Όπως έχει διαφανεί από όσα παραθέσαμε η παρουσίαση ακολουθεί μία πορεία μέσω κομβικών σταθμών αντίστοιχων με αυτών μίας αυστηρής θεώρησης με τη διαφορά όμως ότι απουσιάζει μία πλήρης τεκμηρίωση αφού απαιτεί γνώσεις που δεν ανήκουν στο μαθησιακό υπόβαθρο των μαθητών. Παρ' όλα αυτά τα ευρήματα αυτής της διαδικασίας δε στερούνται της επιστημονικής εγκυρότητας που διασφαλίζεται από μία αυστηρή μαθηματική αντιμετώπιση. Αξίζει τέλος να τονιστεί ότι η γνώση εκ μέρους του διδάσκοντα του διδακτικού μετασχηματισμού που έχει υποστεί μία έννοια συμβάλει στη δημιουργία διδακτικών καταστάσεων που αναδεικνύουν προσεγγίσεις της έννοιας υπό το πρίσμα του θεωρητικού υπόβαθρου από το οποίο εκπορεύεται.

Αναφορές

Bosch, M., & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bull, 58*, 51–64.

Brousseau, G. (1997). *The theory of didactic situations in mathematics*. Dortrecht: Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1989). On didactic transposition theory: some introductory notes *International Symposium on Research and Development in Mathematics Education* (pp. 51-62). Bratislava.

Chevallard, Y. (2004). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. *3e Université d'été Animath* (pp 239-263). Saint-Flour (Cantal).

Dienes, Z. (1971). *Building up mathematics (4th edition).* London, UK: Educational Ltd.

Douady, R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques, 7*(2), 5-31.

Kang, W., & Kilpatrick, J. (1992). Didactic transposition in mathematics textbooks. *For the Learning of Mathematics, 12(1),* 2-7.

Laczkovich, M., & Sós, V.T. (2017*). Real Analysis: Series, Functions of Several Variables, and Applications.* New York: Springer.

Piaget*, J., &* Cook*, M. T. (*1952*). The origins of intelligence in children.* New York, NY: International University Press.

Vergnaud, G. (1982). Cognitive and Developmental Psychology and Research in Mathematics Education: some theoretical and methodological issues. *For the Learning of Mathematics, 3*(2), 31-41.

Wertheimer, M. (1945). *Productive thinking.* NewYork: Harper.

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ., & Σιδέρης, Π. (2012). *Ευκλείδεια Γεωμετρία, Β' Τεύχος*. Αθήνα: Ινστιτούτο τεχνολογίας υπολογιστών και εκδόσεων «Διόφαντος».

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2008). *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου. Βιβλίο μαθητή.* Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Μπετσάκος, Δ. (2016*). Εισαγωγή στην πραγματική ανάλυση.* Αφοί Κυριακίδη Εκδόσεις Α.Ε.

Σπύρου, Π. (2008). *Φάκελος μαθήματος για τη Διδακτική Ι*. Ενδοπανεπιστημιακή έκδοση του Πανεπιστημίου Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών.